CAPÍTULO

4

Flexión pura

El atleta que se muestra sostiene la barra con las manos colocadas a igual distancia de los discos. De esto resulta una flexión pura en la parte central de la barra. Los esfuerzos normales y la curvatura son resultado de dicha flexión pura, la cual será estudiada en este capítulo.

4.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes se estudió cómo determinar los esfuerzos en elementos prismáticos sometidos a cargas axiales o a pares de torsión. En este capítulo y en los dos siguientes se analizarán los esfuerzos y las deformaciones en elementos prismáticos sujetos a *flexión*. La flexión es un concepto muy importante, ya que se utiliza en el diseño de muchos componentes estructurales y de máquinas, tales como vigas y trabes.

Este capítulo se dedicará al análisis de elementos prismáticos sometidos a pares iguales y opuestos **M** y **M′** que actúan en el mismo plano longitudinal. Se dice que tales elementos están sujetos a *flexión pura*. En la mayor parte del capítulo, se supondrá que los elementos poseen un plano de simetría y que los pares **M** y **M′** actúan en dicho plano (figura 4.1).

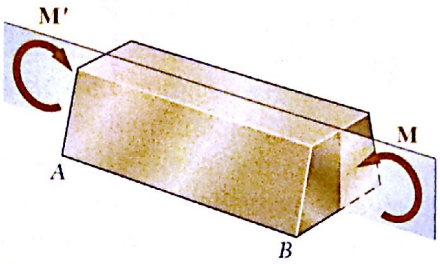


Figura 4.1

Un ejemplo de flexión pura es, por ejemplo, lo que le ocurre a una barra de una pesa gimnástica como las que sostienen los levantadores de pesas encima de su cabeza, como se muestra en la página opuesta. La barra tiene pesos iguales a distancias iguales de las manos del levantador de pesas. Debido a la simetría del diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 4.2*a*), las reacciones en las manos deben ser iguales y opuestas a los pesos. Por lo tanto, en lo que se refiere a la porción central *CD* de la barra, los pesos y las reacciones pueden reemplazarse por dos pares iguales y opuestos de 960 lb · in. (figura 4.2*b*), mostrando que la porción central de la barra se encuentra en flexión pura. Al realizar un análisis similar al eje de un pequeño remolque (figura 4.3) se vería que, entre los puntos donde está unido al remolque, el eje está en flexión pura.

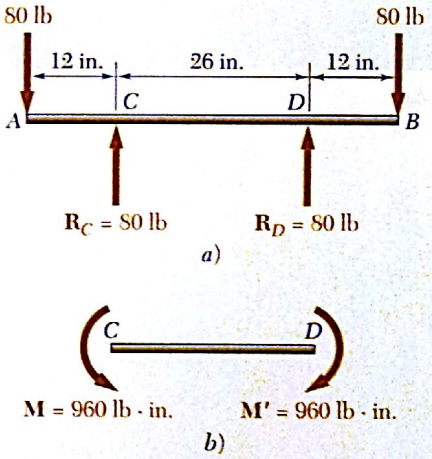


Figura 4.2

A pesar de lo interesantes que pueden ser las aplicaciones directas de la flexión pura, el dedicar un capítulo entero a su estudio no estaría justificado si no fuera por el hecho de que los resultados obtenidos serán utilizados en el análisis de otros tipos de carga, como las *cargas axiales excéntricas* y las *cargas transversales*.

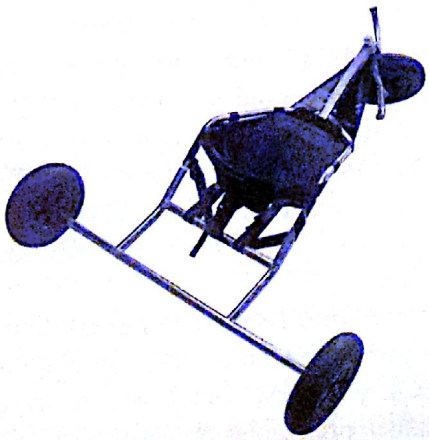


Figura 4.3 Para el carrito deportivo que se muestra en la fotografía, la porción central del eje trasero se encuentra en flexión pura.

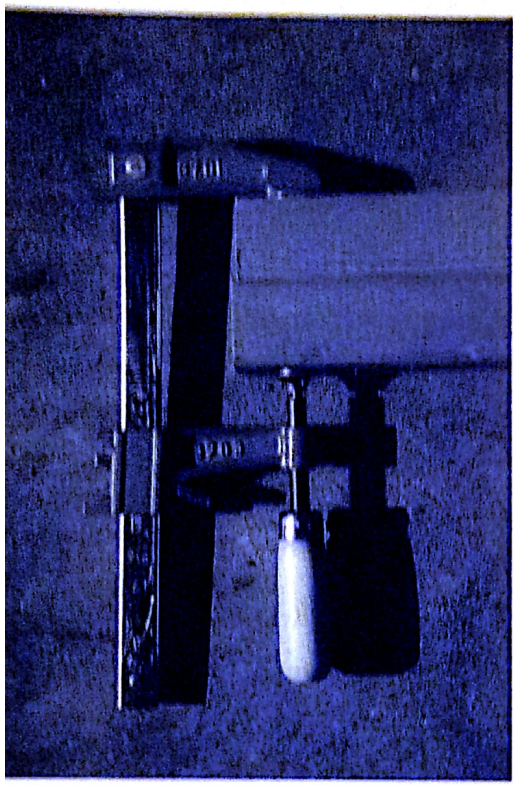


Figura 4.4

La figura 4.4 muestra una prensa de barra de acero de 12 in. utilizada para ejercer fuerzas de 150 lb sobre dos piezas de madera mientras se unen con adhesivo. La figura 4.5*a* presenta las fuerzas iguales y opuestas ejercidas por la madera sobre la prensa. Estas fuerzas producen una *carga excéntrica* de la porción recta de la prensa. En la figura 4.5*b* se efectuó un corte

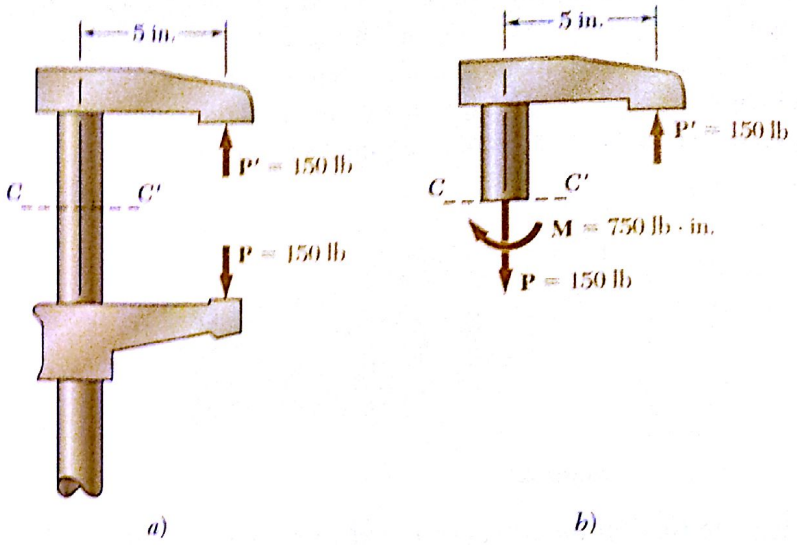


Figura 4.5

CC′ a través de la prensa y se ha dibujado un diagrama de cuerpo libre de la porción superior de la prensa, del que se concluye que las fuerzas internas en la sección son equivalentes a una fuerza axial de tensión **P** de 150 lb y a un par **M** de 750 lb · in. De esta manera pueden combinarse los conocimientos adquiridos acerca de los esfuerzos bajo una carga *centrada* y los resultados del análisis subsiguiente de los esfuerzos en flexión pura para obtener la distribución de esfuerzos bajo una carga *excéntrica*. Esto se discutirá con mayor profundidad en la sección 4.12.

El estudio de la flexión pura también jugará un papel esencial en el estudio de las vigas, es decir, el estudio de los elementos prismáticos sometidos a varios tipos de *cargas transversales*. Considere, por ejemplo, una viga en voladizo *AB* que soporta una carga concentrada **P** en su extremo libre (figura 4.6*a*). Si se realiza un corte en *C* a una distancia *x* de *A*, se observa del diagrama de cuerpo libre de *AC* (figura 4.6*b*) que las fuerzas internas en el corte consisten en una fuerza **P′** igual y opuesta a **P** y de un momento **M** con magnitud $M = Px$. La distribución de esfuerzos normales en la sección puede obtenerse del par **M** como si la viga estuviera en flexión pura. Por otra parte, los esfuerzos cortantes en la sección dependen de la fuerza **P′** y se aprenderá en el capítulo 6 cómo determinar su distribución por encima de una sección transversal dada.

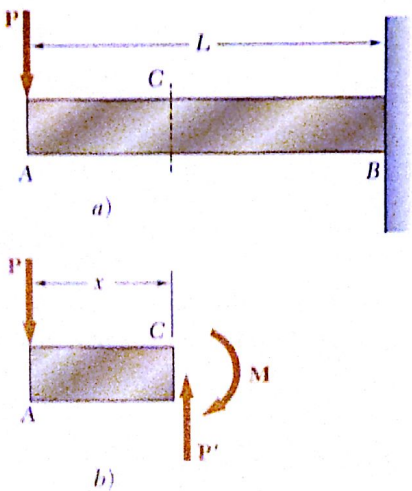


Figura 4.6

La primera parte del capítulo se dedicará al análisis de los esfuerzos y deformaciones causados por la flexión pura en un elemento homogéneo que posea un plano de simetría y que esté elaborado de un material que siga la ley de Hooke. En un análisis preliminar de esfuerzos debidos a flexión (sección 4.2) se utilizarán métodos de estática para deducir tres ecuaciones fundamentales que deben satisfacerse por los esfuerzos normales en cualquier sección transversal dada del elemento. En la sección 4.3 se demostrará que

las *secciones transversales permanecerán planas* en un elemento sometido a flexión pura, mientras que en la sección 4.4 se desarrollarán fórmulas que pueden utilizarse para determinar los *esfuerzos normales*, así como el *radio de curvatura* para dicho elemento dentro del rango elástico.

En la sección 4.6 se estudiarán los esfuerzos y deformaciones en *elementos compuestos* hechos de más de un material, como vigas de concreto reforzado, que combinan las mejores características del acero y del concreto y se utilizan con mucha frecuencia en la construcción de edificios y puentes. Se aprenderá a dibujar una *sección transformada* que represente la sección de un elemento hecha de un material homogéneo que sufra las mismas deformaciones que el elemento compuesto bajo la misma carga. La sección transformada se utilizará para encontrar los esfuerzos y las deformaciones en el elemento compuesto original. La sección 4.7 se dedicará a la determinación de *concentraciones de esfuerzos* que se producen en lugares donde la sección transversal del elemento sufre un cambio repentino.

En la siguiente parte del capítulo se estudiarán las *deformaciones plásticas* en flexión, es decir, la deformación de elementos que se hacen de un material que no sigue la ley de Hooke y que están sometidos a flexión. Después de un análisis general de las deformaciones de dichos elementos (sección 4.8) se investigarán los esfuerzos y deformaciones en elementos hechos de un *material elastoplástico* (sección 4.9). Comenzando con el *momento elástico máximo* M_Y, que corresponde al inicio de la fluencia, se considerarán los efectos de momentos cada vez mayores hasta que se alcance el *momento plástico* M_p, instante en el que el elemento ha cedido por completo. También se aprenderá a obtener las *deformaciones permanentes* y los *esfuerzos residuales* que resultan de tales cargas (sección 4.11). Deberá advertirse que durante el último medio siglo la propiedad elastoplástica del acero se ha utilizado ampliamente para producir mejores diseños tanto en seguridad como en su costo.

En la sección 4.12 se aprenderá a analizar una *carga axial excéntrica* sobre un plano de simetría, como la mostrada en la figura 4.4, superponiendo los esfuerzos debidos a la flexión pura y los esfuerzos debidos a una carga axial centrada.

El tema de la flexión de elementos prismáticos concluye examinando la *flexión asimétrica* (sección 4.13) y el caso general de *cargas axiales excéntricas* (sección 4.14). La última sección del capítulo se dedicará al análisis de esfuerzos en *elementos curvos* (sección 4.15).

4.2 ELEMENTO SIMÉTRICO SOMETIDO A FLEXIÓN PURA

Considere un elemento prismático AB con un plano de simetría y sometido a pares iguales y opuestos $\mathbf{M}$ y $\mathbf{M}'$ que actúan en dicho plano (figura 4.7*a*). Se observa que si se efectúa un corte a través del elemento AB en algún punto arbitrario C, las condiciones de equilibrio de la porción AC del elemento requieren que las fuerzas internas en la sección sean equivalentes al par $\mathbf{M}$ (figura 4.7*b*). Así, las fuerzas internas en cualquier sección transversal de un elemento simétrico en flexión pura son equivalentes a un par. El momento M de dicho par se conoce como el *momento flector* en la sección. Siguiendo la convención acostumbrada, un signo positivo se asignará a M cuando el elemento se flexiona como se indica en la figura 4.7*a*, esto es, cuando la cavidad de la viga mira hacia arriba, y un signo negativo en caso contrario.

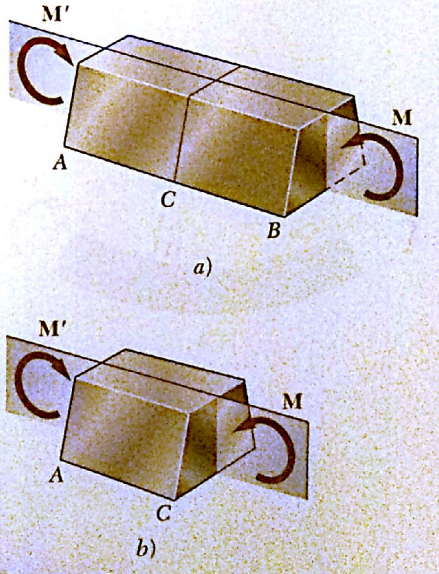


Figura 4.7

Denotando por σ_x el esfuerzo normal en un punto dado de la sección transversal y por τ_{xy} y τ_{xz} las componentes del esfuerzo cortante, se expresa que el sistema de fuerzas internas elementales ejercido sobre la sección es equivalente al par **M** (figura 4.8).

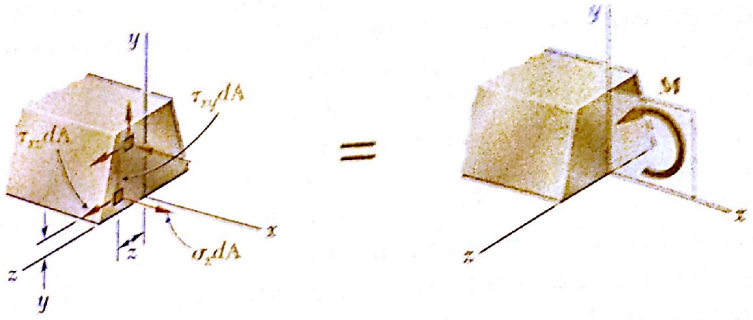


Figura 4.8

Recuerde de la estática, que un par **M** en realidad consiste de dos fuerzas iguales y opuestas. La suma de las componentes de estas fuerzas en cualquier dirección es, por tanto, igual a cero. Además, el momento del par es el mismo alrededor de *cualquier* eje perpendicular a su plano, y es cero alrededor de cualquier eje contenido en dicho plano. Seleccionando el eje z arbitrariamente, como se muestra en la figura 4.8, se expresa la equivalencia de las fuerzas internas elementales y del par **M** escribiendo que las sumas de las componentes y de los momentos de las fuerzas elementales son iguales a las componentes y momentos correspondientes al par **M**:

componentes en x: $$\int \sigma_x \, dA = 0 \tag{4.1}$$

momentos alrededor del eje y: $$\int z\sigma_x \, dA = 0 \tag{4.2}$$

momentos alrededor del eje z: $$\int (-y\sigma_x \, dA) = M \tag{4.3}$$

Podrían obtenerse tres ecuaciones adicionales haciendo iguales a cero las sumas de las componentes en y, las componentes en z y los momentos alrededor del eje x, pero estas ecuaciones involucrarían únicamente las componentes de esfuerzo cortante y, como se verá en la siguiente sección, las componentes del esfuerzo cortante son ambas iguales a cero.

En este punto deben hacerse dos anotaciones: 1) El signo negativo en la ecuación (4.3) se debe a que un esfuerzo de tensión ($\sigma_x > 0$) lleva a un momento negativo (en el sentido de las agujas del reloj) de la fuerza normal $\sigma_x \, dA$ alrededor del eje z. 2) La ecuación (4.2) podría haberse anticipado, ya que la aplicación de pares en el plano de simetría del elemento AB resultará en una distribución de esfuerzos normales que es simétrica alrededor del eje y.

De nuevo, se advierte que la distribución real de esfuerzos en una sección transversal dada no puede determinarse con la estática únicamente. Es *estáticamente indeterminada* y sólo puede obtenerse analizando las *deformaciones* producidas en el elemento.

4.3 DEFORMACIONES EN UN ELEMENTO SIMÉTRICO SOMETIDO A FLEXIÓN PURA

Se estudiarán ahora las deformaciones de un elemento prismático que posee un plano de simetría y está sometido en sus extremos a pares iguales y opuestos **M** y **M′** que actúan en el plano de simetría. El elemento se flexionará bajo la acción de los pares, pero permanecerá simétrico con respecto a dicho plano (figura 4.9). Además, como el momento flector M es el mismo en cual-

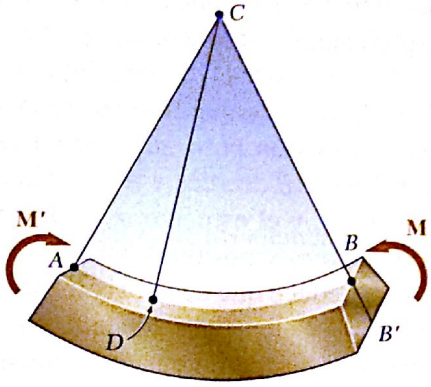


Figura 4.9

quier sección, el elemento se flexionará de manera uniforme. Así, la línea de intersección AB entre la cara superior del elemento y el plano de los pares tendrá una curvatura constante. Es decir, la línea AB, que era originalmente recta, se transformará en un círculo de centro C; lo mismo ocurrirá con la línea $A'B'$ (no mostrada en la figura) a lo largo de la cual la cara inferior del elemento interseca el plano de simetría. También se observará que AB se acortará mientras $A'B'$ se alargará al ocurrir la flexión mostrada en la figura, es decir, con $M > 0$,

Ahora se probará que cualquier sección transversal perpendicular al eje del elemento permanece plana, y que el plano de la sección pasa por C. Si no fuera así, podría encontrarse un punto E del corte original en D (figura 4.10*a*), el cual después de flexionar el elemento, *no* estaría en el plano perpendicular al plano de simetría que contiene la línea CD (figura 4.10*b*). Sin embargo, debido a la simetría del elemento, habrá otro punto E' que se transformará exactamente de la misma manera. Suponga que después de flexionar la viga, ambos puntos estuvieran localizados a la izquierda del plano definido por CD, como se muestra en la figura 4.10*b*. Puesto que el momento flector M es el mismo en todo el elemento, una situación similar prevalecería en cualquier otra sección, y los puntos correspondientes a E y E' también se moverían a la izquierda. Así, un observador en A concluiría que la carga provoca que las partes E y E', en las diferentes secciones, se muevan hacia él. Pero, un observador en B, para quien las cargas se ven igual, y que mira los puntos E y E' en las mismas posiciones (excepto que ahora están invertidas), llegaría a la conclusión opuesta. Esta inconsistencia lleva a afirmar que E y E' estarán en el plano definido por CD y, por tanto, que la sección permanece plana y pasa por C. Se debe anotar, sin embargo, que este análisis no excluye la posibilidad de que se presenten deformaciones *dentro* del plano de la sección (véase sección 4.5).

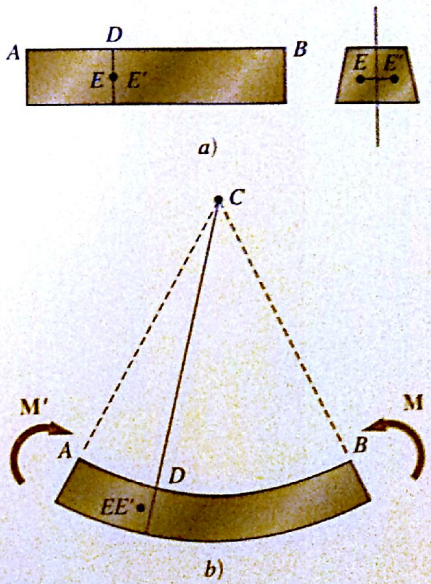
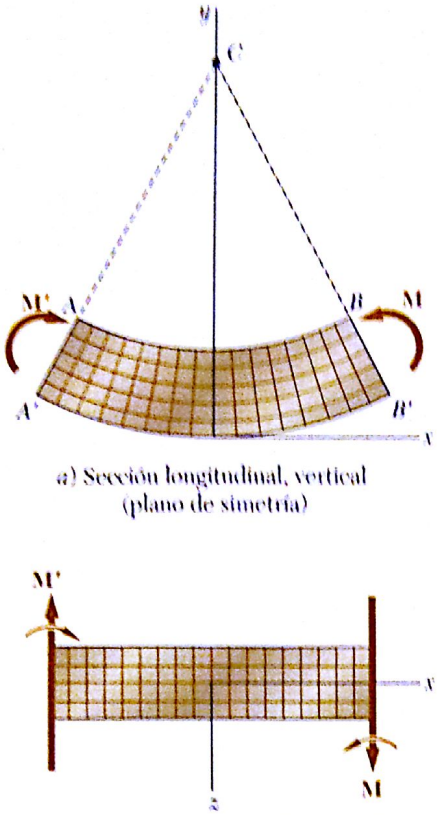


Figura 4.10

Suponga que el elemento está dividido en un gran número de pequeños elementos cúbicos con caras paralelas a los tres planos coordenados. La propiedad que se ha establecido requiere que estos pequeños elementos se transformen, como se muestra en la figura 4.11, cuando el elemento se somete a los pares **M** y **M'**. Como todas las caras representadas en las dos proyecciones de la figura 4.11 forman entre sí un ángulo de 90°, se concluye que $\gamma_{xy} = \gamma_{zx} = 0$, por tanto, que $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$. Observando las tres componentes del esfuerzo que no se han analizado todavía, es decir, σ_y, σ_z y τ_{yz}, se nota que deben ser nulas en la superficie del elemento. Como, por otra parte, las deformaciones comprendidas no requieren ninguna interacción de los pequeños elementos de una sección transversal dada, se supondrá que estas tres componentes del esfuerzo son nulas en todo el elemento. Esta hipótesis se verifica tanto experimental como teóricamente para elementos delgados que sufren pequeñas deformaciones.† Se concluye que la única componente del esfuerzo no nula es la componente normal σ_x. Así, en cualquier punto de un elemento delgado, en flexión pura, se tiene un estado de *esfuerzo uniaxial*. Recordando que la línea AB decrece y $A'B'$ se alarga, cuando $M > 0$, se nota que la deformación ϵ_x y el esfuerzo σ_x son negativos en la parte superior del elemento (*compresión*) y positivos bajos (*tensión*).

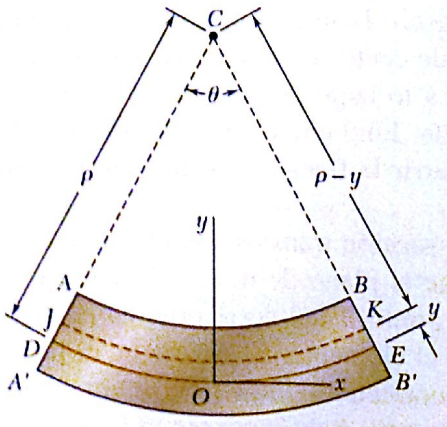


a) Sección longitudinal, vertical (plano de simetría)

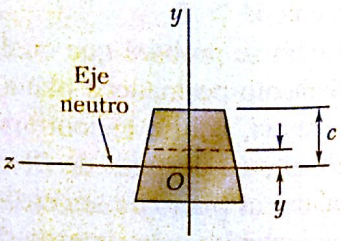
b) Sección longitudinal, horizontal

Figura 4.11

De lo anterior se deduce que debe existir una superficie paralela a las caras superior e inferior del elemento, donde ϵ_x y σ_x se anulan. Esta superficie es la *superficie neutra*. La superficie neutra interseca el plano de simetría según un arco de círculo DE (figura 4.12*a*) e interseca una sección transversal a lo largo de una línea recta llamada *eje neutro* de la sección (figura 4.12*b*).



a) Sección longitudinal, vertical (plano de simetría)



b) Sección transversal

Figura 4.12

Se escogerá el origen de coordenadas en la superficie neutra, en lugar de la cara inferior, como se hizo antes, de modo que la distancia de cualquier punto a la superficie neutra se medirá por la coordenada y.

† Véase también el problema 4.38.

Llamando ρ el radio del círculo DE (figura 4.12*a*), θ el ángulo central que corresponde a DE, y observando que la longitud de DE es igual a la longitud L del elemento no deformado, se tiene

$$L = \rho\theta \tag{4.4}$$

Considerando ahora el arco JK ubicado a una distancia y sobre la superficie neutra, se observa que su longitud L' es

$$L' = (\rho - y)\theta \tag{4.5}$$

Como la longitud original del arco JK era igual a L, la deformación de JK es

$$\delta = L' - L \tag{4.6}$$

o, sustituyendo (4.4) y (4.5) en (4.6),

$$\delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta \tag{4.7}$$

La deformación unitaria longitudinal ϵ_x de los elementos de JK se obtiene dividiendo δ entre la longitud original L de JK:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta}$$

o

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{4.8}$$

El signo negativo se debe a que se ha supuesto positivo el momento flector y, por lo tanto, que la viga es cóncava hacia arriba.

Debido a que las secciones deben permanecer planas, se producen deformaciones idénticas en todos los planos paralelos al plano de simetría. Así, el valor de la deformación unitaria, dado en la ecuación (4.8), es válido en todos los puntos y se concluye que la *deformación unitaria longitudinal normal* ϵ_x *varía linealmente con la distancia y desde la superficie neutra.*

La deformación unitaria ϵ_x alcanza su máximo valor absoluto cuando y es máxima. Si c es la distancia máxima a la superficie neutra (que corresponde a la superficie superior o inferior del elemento), y ϵ_m es el *máximo valor absoluto* de la deformación unitaria, se tiene

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \tag{4.9}$$

Resolviendo (4.9) para ρ y reemplazando en (4.8):

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_m \tag{4.10}$$

Se concluye el análisis de las deformaciones de un elemento sometido a flexión pura observando que aún no es posible calcular los esfuerzos o las deformaciones en un punto dado del elemento puesto que todavía no se ha localizado la superficie neutra. Para localizarla se tendría que especificar la relación esfuerzo-deformación del material utilizado.†

† Se nota, sin embargo, que si el cuerpo posee tanto un plano vertical de simetría como uno longitudinal (un miembro con sección rectangular) y si la curva de esfuerzo-deformación es la misma en tensión y en compresión, la superficie neutra coincidirá con el plano de simetría (véase sección 4.8).

4.4 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN EL RANGO ELÁSTICO

A continuación se estudiará el caso en el que el momento flector M es tal que los esfuerzos normales en el elemento permanecen por debajo del esfuerzo de fluencia σ_Y. Esto implica que, para propósitos prácticos, los esfuerzos en el elemento permanecerán por debajo del límite estático. No habrá deformaciones permanentes y podrá aplicarse la ley de Hooke para el esfuerzo uniaxial. Suponiendo que el material es homogéneo, y denotando por E al módulo de elasticidad, se tiene que en la dirección longitudinal x

$$\sigma_x = E\epsilon_x \tag{4.11}$$

Recordando la ecuación (4.10) y multiplicando ambos miembros por E:

$$E\epsilon_x = -\frac{y}{c}(E\epsilon_m)$$

o, usando (4.11),

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \tag{4.12}$$

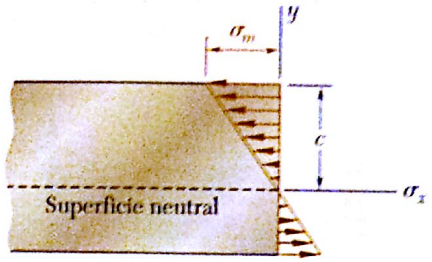


Figura 4.13

donde σ_m es el *máximo valor absoluto* de esfuerzo. Este resultado muestra que, *en el rango elástico, el esfuerzo normal varía linealmente con la distancia al plano neutro* (figura 4.13).

Debe anotarse que, hasta aquí, todavía se desconoce la localización de la superficie neutra y el valor máximo σ_m del esfuerzo. Ambos pueden hallarse si se recuerdan las relaciones (4.1) y (4.3), obtenidas antes, de la estática. Sustituyendo primero por σ_x de (4.12) en (4.1)

$$\int \sigma_x \, dA = \int \left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = -\frac{\sigma_m}{c}\int y \, dA = 0$$

de donde se sigue que

$$\int y \, dA = 0 \tag{4.13}$$

Esta ecuación muestra que el primer momento de la sección transversal con respecto al eje neutro debe ser cero.† En otras palabras, si un elemento se somete a flexión pura y *los esfuerzos permanecen en el rango elástico, el eje neutro pasa por el centroide de la sección.*

Recuerde la ecuación (4.3), deducida en la sección 4.2, con respecto a un eje z horizontal *arbitrario*

$$\int (-y\sigma_x \, dA) = M \tag{4.3}$$

Especificando que el eje z debe coincidir con el eje neutro de la sección, reemplazando σ_x de (4.12) en (4.3) se tiene

† Véase el apéndice A para un análisis de momentos de áreas.

$$\int (-y)\left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = M$$

o

$$\frac{\sigma_m}{c}\int y^2\, dA = M \tag{4.14}$$

Recordando que en el caso de flexión pura el eje neutro pasa por el centroide de la sección, se observa que I es el momento de inercia, o segundo momento, de la sección transversal con respecto al eje centroidal perpendicular al plano del par **M**. Resolviendo (4.14) para σ_m:†

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

Reemplazando σ_m de (4.15) en (4.12), se obtiene el esfuerzo normal σ_x a cualquier distancia y del eje neutro:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

Las ecuaciones (4.15) y (4.16) se llaman *ecuaciones de flexión elástica*, y el esfuerzo normal σ_x causado por la "flexión" del elemento se designa con frecuencia como *esfuerzo de flexión*. Se verifica que el esfuerzo es de compresión ($\sigma_x < 0$) por encima del eje neutro ($y > 0$) cuando el momento M es positivo, y de tensión ($\sigma_x > 0$) cuando M es negativo.

Volviendo a la ecuación (4.15), se nota que la razón I/c depende sólo de la geometría de la sección transversal. Esta relación se denomina *módulo elástico de la sección* y se representa por S.

$$\text{Módulo elástico de la sección} = S = \frac{I}{c} \tag{4.17}$$

Sustituyendo S por I/c en la ecuación (4.15), se escribe esta ecuación en la forma alternativa:

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \tag{4.18}$$

Como el esfuerzo máximo σ_m es inversamente proporcional al módulo elástico S, es claro que las vigas deben diseñarse con un S tan grande como sea práctico. Por ejemplo, en el caso de una viga de madera de sección rectangular de ancho b y altura h, se tiene:

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \tfrac{1}{6}bh^2 = \tfrac{1}{6}Ah \tag{4.19}$$

donde A es el área de la sección transversal de la viga. Esto muestra que, de dos vigas con igual sección transversal A (figura 4.14), la viga con mayor profundidad h tendrá el mayor módulo de sección y, por tanto, será la más efectiva para resistir la flexión.‡

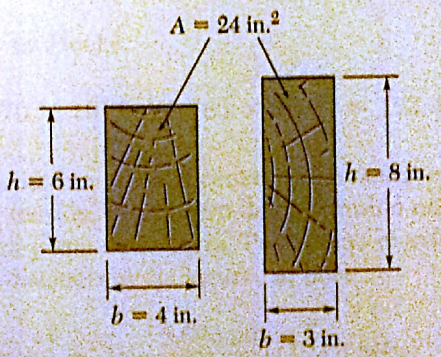


Figura 4.14

† Recuerde que se supuso positivo el momento flector. Si el momento de flexión M es negativo, M debe reemplazarse en la ecuación (4.15) por su valor absoluto $|M|$.

‡ Sin embargo, algunos valores grandes de la razón h/b pueden producir la inestabilidad lateral en la viga.

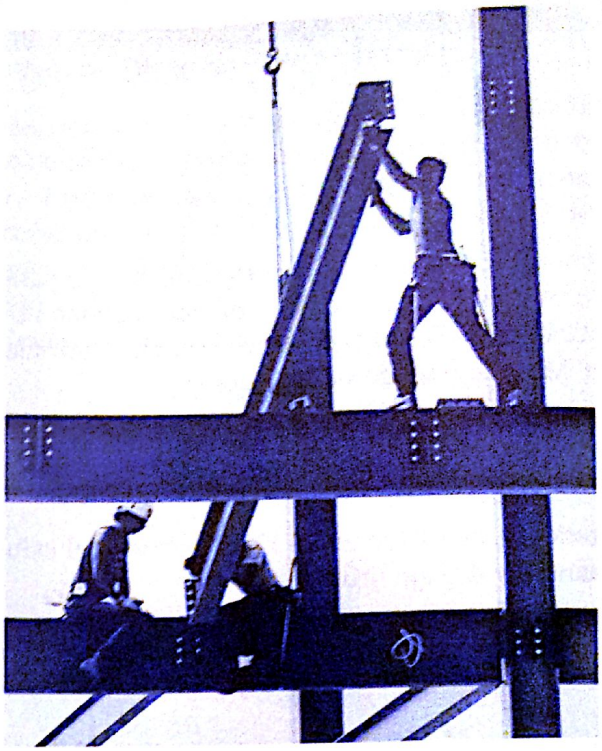
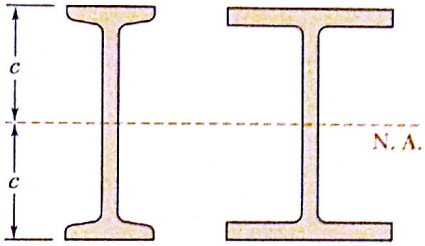


Figura 4.15 Las vigas de acero de patín ancho forman el armazón de muchos edificios.



a) Viga *S* *b*) Viga *W*

Figura 4.16

En el caso de acero estructural, las vigas estándares estadounidenses (vigas *S*) y las vigas de aleta ancha (vigas *W*) (figura 4.15) son preferibles a otros perfiles ya que una gran porción de su sección transversal se coloca lejos del eje neutro (figura 4.16). Así, para un área de sección transversal dada y una altura dada, su diseño proporciona grandes valores de I y, por tanto, de S. Los valores del módulo elástico de la sección de vigas comúnmente fabricadas pueden obtenerse en tablas que traen una lista de las diferentes propiedades geométricas de tales vigas. Para determinar el esfuerzo máximo σ_m en una sección de la viga estándar, el ingeniero sólo tiene que leer el valor del módulo elástico S en una tabla y dividir el momento flector M en la sección entre S.

La deformación del elemento causada por el momento flector M se mide por la *curvatura* de la superficie neutra. La curvatura se define como el inverso del radio de curvatura ρ y puede obtenerse resolviendo la ecuación (4.9) entre $1/\rho$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c} \tag{4.20}$$

Pero, en el rango elástico, se tiene $\epsilon_m = \sigma_m/E$. Sustituyendo por ϵ_m en (4.20), y recordando (4.15):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec}\frac{Mc}{I}$$

o

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{4.21}$$

EJEMPLO 4.01

Una barra de acero de 0.8×2.5 in. se somete a dos pares iguales y opuestos que actúan en el plano vertical de simetría de la barra (figura 4.17). Determine el valor del momento flector M que hace fluir la barra. Suponga $\sigma_Y = 36$ ksi.

Figura 4.17

Puesto que el eje neutro debe pasar por el centroide C de la sección, $c = 1.25$ in. (figura 4.18). Por otra parte, el momento de inercia centroidal de la sección rectangular es

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(0.8 \text{ in.})(2.5 \text{ in.})^3 = 1.042 \text{ in.}^4$$

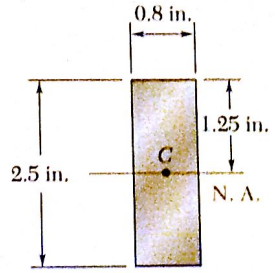


Figura 4.18

Resolviendo la ecuación (4.15) para M, y sustituyendo los datos anteriores:

$$M = \frac{I}{c}\sigma_m = \frac{1.042 \text{ in.}^4}{1.25 \text{ in.}}(36 \text{ ksi})$$

$$M = 30 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

EJEMPLO 4.02

Se flexiona una barra semicircular de aluminio, con radio $r = 12$ mm (figura 4.19), hasta darle forma de un arco circular de radio medio $\rho = 2.5$ m. Si la cara plana de la barra se dirige hacia el centro de curvatura del arco, halle los esfuerzos máximos de tensión y compresión de la barra. Considere $E = 70$ GPa.

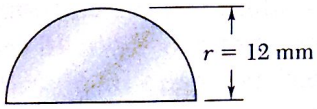


Figura 4.19

Se podría usar la ecuación (4.21) para calcular el momento M correspondiente al radio de curvatura ρ y luego la ecuación (4.15) para hallar σ_m. Sin embargo, es más sencillo utilizar la ecuación (4.9) para encontrar ϵ_m y la ley de Hooke para obtener σ_m.

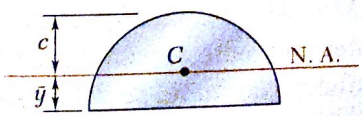


Figura 4.20

La ordenada $\bar{y}$ del centroide C de la sección semicircular es:

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(12 \text{ mm})}{3\pi} = 5.093 \text{ mm}$$

El eje neutro pasa por C (figura 4.20) y la distancia c al punto más alejado de la sección, del eje neutro, es

$$c = r - \bar{y} = 12 \text{ mm} - 5.093 \text{ mm} = 6.907 \text{ mm}$$

Usando la ecuación (4.9):

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} = \frac{6.907 \times 10^{-3} \text{ m}}{2.5 \text{ m}} = 2.763 \times 10^{-3}$$

y aplicando la ley de Hooke,

$$\sigma_m = E\epsilon_m = (70 \times 10^9 \text{ Pa})(2.763 \times 10^{-3}) = 193.4 \text{ MPa}$$

Como este lado de la cara no da al centro de curvatura, el esfuerzo obtenido es de tensión. El esfuerzo de compresión máximo se presenta en la cara plana de la barra. Puesto que el esfuerzo es proporcional a la distancia al eje neutro, se tiene

$$\sigma_{\text{comp}} = -\frac{\bar{y}}{c}\sigma_m = -\frac{5.093 \text{ mm}}{6.907 \text{ mm}}(193.4 \text{ MPa})$$

$$= -142.6 \text{ MPa}$$

4.5 DEFORMACIONES EN UNA SECCIÓN TRANSVERSAL

Cuando se probó en la sección 4.3, que la sección transversal de un elemento sometido a flexión pura permanecía plana, no se excluyó la posibilidad de que se presentaran deformaciones dentro del plano de la sección. Que tales deformaciones existirán, es evidente si se recuerda que (sección 2.11) los elementos en un estado uniaxial de esfuerzo, $\sigma_x \neq 0, \sigma_y = \sigma_z = 0$, se deforman tanto en las direcciones transversales y y z, como en la dirección axial x. Las deformaciones normales ϵ_y y ϵ_z dependen del módulo de Poisson ν del material usado y se expresan como

$$\epsilon_y = -\nu\epsilon_x \qquad \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$$

o, recordando la ecuación (4.8),

$$\epsilon_y = \frac{\nu y}{\rho} \qquad \epsilon_z = \frac{\nu y}{\rho} \tag{4.22}$$

Las relaciones obtenidas muestran que los elementos situados por encima de la superficie neutra ($y > 0$) se expanden en ambas direcciones y y z, en tanto que los elementos por debajo de la superficie neutra ($y < 0$) se contraen. En un elemento de sección rectangular, se compensarán la expansión y contracción de los elementos en la dirección vertical y no se observarán cambios en la dirección vertical. En cuanto a las deformaciones en la dirección transversal horizontal z, sin embargo, la expresión de los elementos situados sobre la superficie neutra y la contracción correspondiente de los elementos situados debajo producirán que las líneas longitudinales de la sección se conviertan en arcos de círculo (figura 4.21). La situación señalada es similar a la de una sección longitudinal. Comparando la segunda de las ecuaciones (4.22) con la ecuación (4.8), se deduce que el eje neutro de la sección transversal se flexionará en un círculo de radio $\rho' = \rho/\nu$. El centro C' de este círculo se localiza debajo de la superficie neutra (si $M > 0$), es decir, en el lado opuesto al centro de curvatura C del elemento. El inverso del radio de curvatura ρ' es la curvatura de la sección transversal y se denomina *curvatura anticlástica*. Se tiene

$$\text{Curvatura anticlástica} = \frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho} \tag{4.23}$$

En el análisis de las deformaciones de un elemento simétrico sometido a flexión pura, tanto en esta sección como en las anteriores, se habrá ignorado el modo en que realmente **M** y **M′** se aplicaban a ese elemento. Si *todas* las secciones transversales del elemento, de un extremo a otro, han de permanecer planas y libres de esfuerzo cortante, se debe estar seguro de que

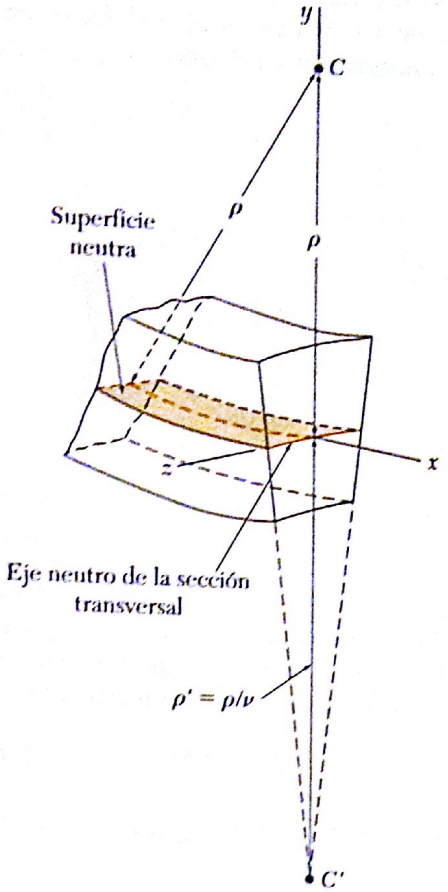


Figura 4.21

los pares se aplican de tal manera que los extremos del elemento mismo permanecen planos y libres de esfuerzos cortantes. Esto puede cumplirse aplicando los pares **M** y **M′** por medio de placas rígidas y lisas (figura 4.22). Las fuerzas elementales que las platinas ejercen sobre el elemento serán normales a las secciones del extremo, y estas secciones, mientras permanecen planas, quedarán libres para deformarse como se ha descrito en esta sección.

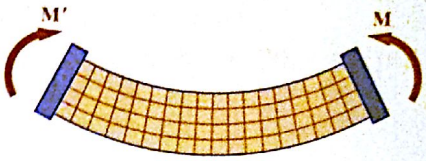
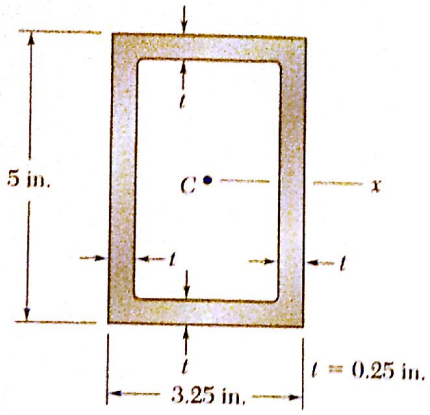


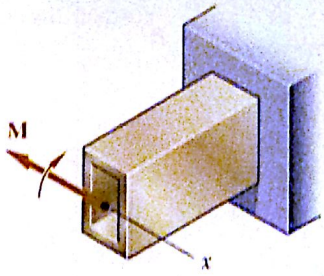
Figura 4.22

Debe recalcarse que estas condiciones de carga no se presentan en la práctica, ya que requieren que cada placa ejerza fuerzas de tensión sobre la sección correspondiente por debajo de su eje neutro, y se permita simultáneamente que la sección se deforme libremente en su propio plano. El que las placas rígidas de la figura 4.22 no puedan darse en la realidad no les quita su importancia, que es permitir *visualizar* las condiciones de carga correspondientes a las relaciones descritas en las secciones precedentes. Las condiciones de carga reales pueden diferir mucho del modelo idealizado. En virtud del principio de Saint-Venant, sin embargo, las relaciones obtenidas pueden utilizarse para calcular los esfuerzos en situaciones prácticas, siempre que la sección considerada no esté muy cerca de los puntos de aplicación de los pares.

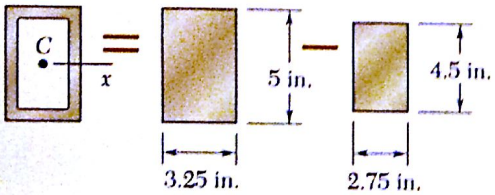
PROBLEMA MODELO 4.1

El tubo rectangular que se representa en la figura se obtiene de una aleación de aluminio con $\sigma_Y = 40$ ksi, $\sigma_U = 60$ ksi y $E = 10.6 \times 10^6$ psi. Despreciando el efecto, determine *a*) el momento flector M para el cual el factor de seguridad será 3.00, *b*) el radio de curvatura correspondiente del tubo.





SOLUCIÓN



Momento de inercia. Considerando la sección transversal del tubo como la diferencia de los dos rectángulos, como se muestra en la figura y recordando la fórmula del momento centroidal de inercia de un rectángulo, se tiene

$$I = \tfrac{1}{12}(3.25)(5)^3 - \tfrac{1}{12}(2.75)(4.5)^3 \qquad I = 12.97 \text{ in.}^4$$

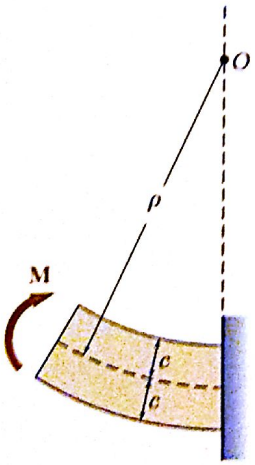
Esfuerzo admisible. Con un factor de seguridad de 3.00 y con un esfuerzo último de 60 ksi:

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{60 \text{ ksi}}{3.00} = 20 \text{ ksi}$$

Puesto que $\sigma_{\text{perm}} < \sigma_Y$, el tubo permanece en el rango elástico y pueden aplicarse los resultados de la sección 4.4.

***a*) Momento flector.** Si $c = \frac{1}{2}(5 \text{ in.}) = 2.5$ in., entonces

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{Mc}{I} \qquad M = \frac{I}{c}\sigma_{\text{perm}} = \frac{12.97 \text{ in.}^4}{2.5 \text{ in.}}(20 \text{ ksi}) \qquad M = 103.8 \text{ kips} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$



***b*) Radio de curvatura.** Como $E = 10.6 \times 10^6$ psi, se sustituye este valor y los obtenidos de I y M en la ecuación (4.21) para encontrar

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{103.8 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{(10.6 \times 10^6 \text{ psi})(12.97 \text{ in.}^4)} = 0.755 \times 10^{-3} \text{ in.}^{-1}$$

$$\rho = 1\,325 \text{ in.} \qquad \rho = 110.4 \text{ ft} \blacktriangleleft$$

Solución alterna. Como se conoce el esfuerzo máximo, $\sigma_{\text{perm}} = 20$ ksi, se determina la deformación máxima ϵ_m y se utiliza la ecuación (4.9),

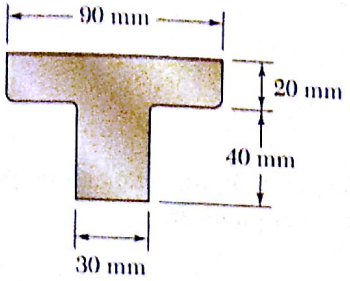
$$\epsilon_m = \frac{\sigma_{\text{perm}}}{E} = \frac{20 \text{ ksi}}{10.6 \times 10^6 \text{ psi}} = 1.887 \times 10^{-3} \text{ in./in.}$$

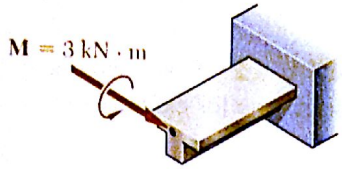
$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \qquad \rho = \frac{c}{\epsilon_m} = \frac{2.5 \text{ in.}}{1.887 \times 10^{-3} \text{ in./in.}}$$

$$\rho = 1\,325 \text{ in.} \qquad \rho = 110.4 \text{ ft} \blacktriangleleft$$

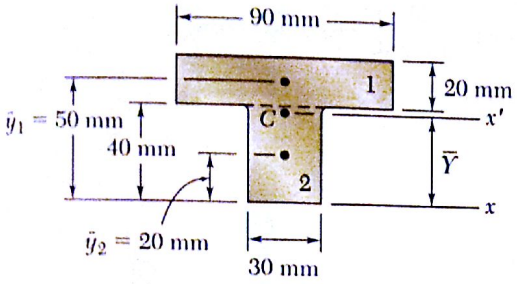
PROBLEMA MODELO 4.2

Una sección de una máquina de hierro colado se somete a un par de 3 kN · m, tal como se muestra en la figura. Si $E = 165$ GPa y se desprecia el efecto del filete, determine *a*) los esfuerzos máximos de tensión y compresión en el elemento fundido, *b*) su radio de curvatura.





SOLUCIÓN

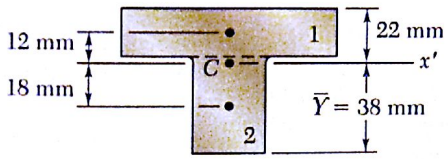


Centroide. Se divide la sección transversal en T en dos rectángulos y se escribe:

	Área, mm²	$\bar{y}$, mm	$\bar{y}A$, mm³
1	(20)(90) = 1 800	50	90×10^3
2	(40)(30) = 1 200	20	24×10^3
	$\Sigma A = 3\,000$		$\Sigma\bar{y}A = 114 \times 10^3$

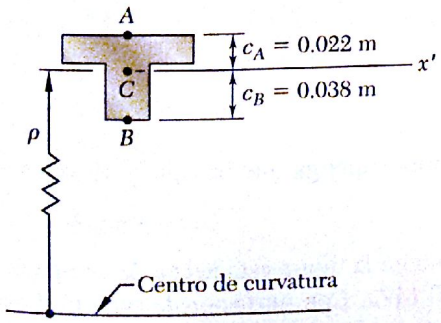
$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A$
$\bar{Y}(3\,000) = 114 \times 10^6$
$\bar{Y} = 38$ mm

Momento centroidal de inercia. Se utiliza el teorema de los ejes paralelos para hallar el momento de inercia de cada rectángulo, con respecto al eje x' que pasa por el centroide de la sección compuesta. Sumando esos momentos de inercia, se tiene



$$I_{x'} = \Sigma(\bar{I} + Ad^2) = \Sigma(\tfrac{1}{12}bh^3 + Ad^2)$$
$$= \tfrac{1}{12}(90)(20)^3 + (90 \times 20)(12)^2 + \tfrac{1}{12}(30)(40)^3 + (30 \times 40)(18)^2$$
$$= 868 \times 10^3 \text{ mm}^4$$
$$I = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

***a*) Esfuerzo máximo de tensión.** Como los momentos aplicados flexionan la fundición hacia abajo, el centro de curvatura se sitúa debajo de la sección. Su tensión máxima ocurre en el punto *A*, que es el más alejado del centro de curvatura.



$$\sigma_A = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(3 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.022 \text{ m})}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \qquad \sigma_A = +76.0 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Esfuerzo máximo de compresión. Se produce en el punto *B*; se tiene

$$\sigma_B = -\frac{Mc_B}{I} = -\frac{(3 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.038 \text{ m})}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \qquad \sigma_B = -131.3 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

***b*) Radio de curvatura.** De la ecuación (4.21) se tiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{3 \text{ kN} \cdot \text{m}}{(165 \text{ GPa})(868 \times 10^{-9} \text{ m}^4)}$$
$$= 20.95 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1} \qquad \rho = 47.7 \text{ m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

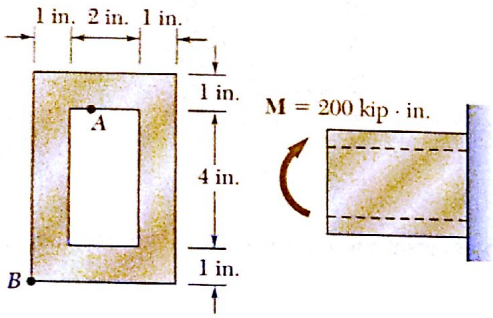


Figura P4.1

4.1 y *4.2* Si se sabe que el par mostrado en la figura actúa en un plano vertical, determine los esfuerzos en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

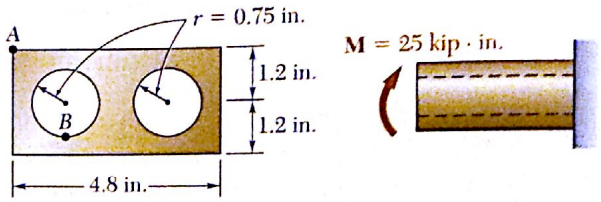


Figura *P4.2*

4.3 Una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se troquela con una aleación de aluminio para la que $\sigma_Y = 250$ MPa y $\sigma_U = 450$ MPa. Utilizando un factor de seguridad de 3.0, determine el par máximo que puede aplicarse a la viga cuando se flexiona alrededor del eje *z*.

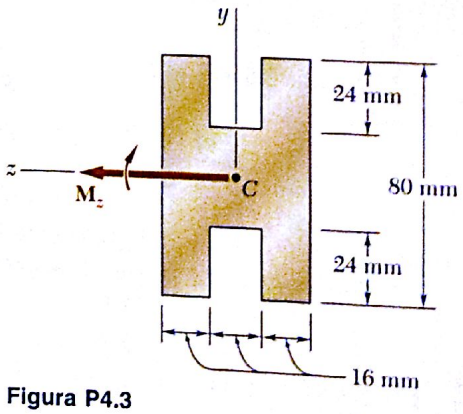


Figura P4.3

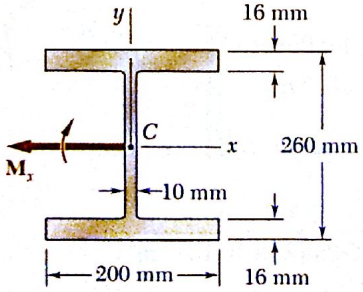


Figura P4.5

4.4 Retome el problema 4.3, y ahora suponga que la viga se flexiona alrededor del eje *y*.

4.5 La viga de acero que se muestra en la figura está hecha de un tipo de acero para el cual $\sigma_Y = 250$ MPa y $\sigma_U = 400$ MPa. Con un factor de seguridad de 2.50, determine el mayor par que puede aplicarse a la viga cuando se dobla alrededor del eje *x*.

4.6 Retome el problema 4.5, y ahora suponga que la viga se flexiona alrededor del eje *y* por medio de un par con momento M_y.

4.7 a 4.9 Dos fuerzas verticales se aplican a una viga con la sección transversal que se muestra en las figuras. Determine los esfuerzos máximos de tensión y de compresión en la porción BC de la viga.

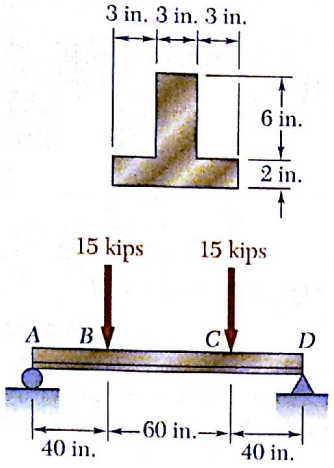


Figura P4.7

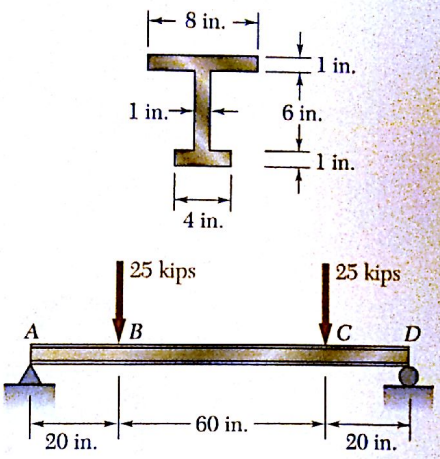
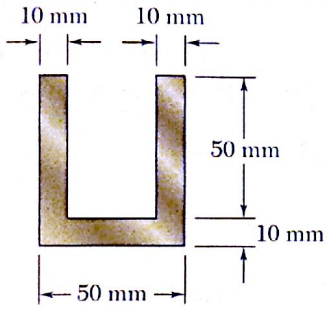


Figura *P4.8*



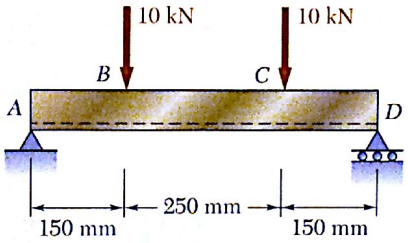
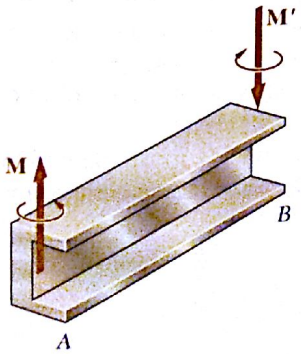


Figura P4.9

4.10 Dos pares iguales y opuestos de magnitud $M = 25$ kN · m se aplican a una viga con sección de canal AB. Puesto que los pares provocan que la viga se flexione en un plano horizontal, determine el esfuerzo *a*) en el punto C, *b*) en el punto D, *c*) en el punto E.



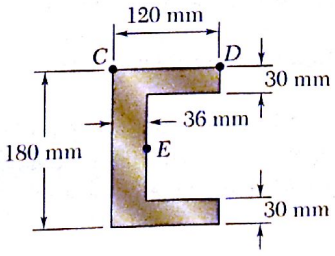


Figura *P4.10*

4.11 Si se sabe que una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se flexiona alrededor de un eje horizontal y que el momento flector es de 8 kip · in., determine la fuerza total que actúa en la porción sombreada de la viga.

4.12 Retome el problema 4.11, y ahora suponga que la viga se flexiona alrededor de un eje vertical y que el momento flector es de 8 kip · in.

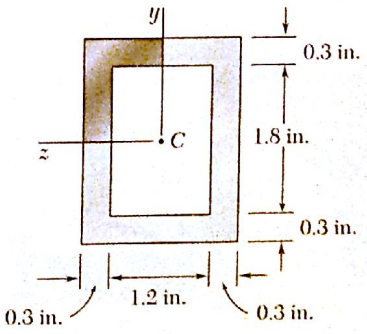


Figura P4.11

4.13 Si una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se flexiona alrededor de un eje horizontal y se sabe que el momento flector es de 6 kN · m, determine la fuerza total que actúa en la aleta superior.

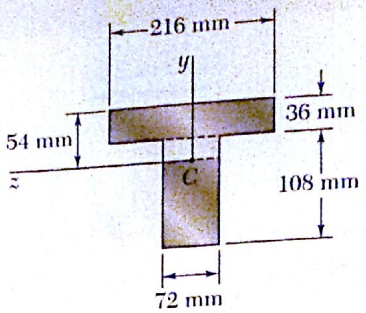


Figura P4.13 y *P4.14*

4.14 Si una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se flexiona alrededor de un eje horizontal y se sabe que el momento flector es de 6 kN · m, determine la fuerza total que actúa en la porción sombreada del alma.

4.15 Si se sabe que para la fundición mostrada en la figura el esfuerzo permisible es de 6 ksi en tensión y 15 ksi en compresión, determine el máximo par M que puede aplicarse.

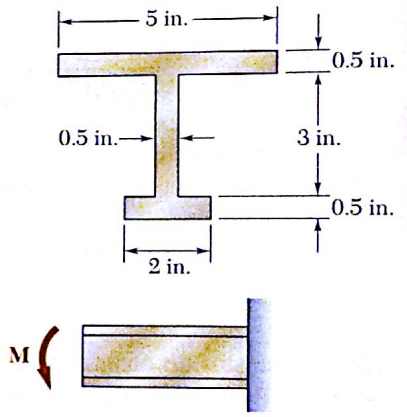


Figura P4.15

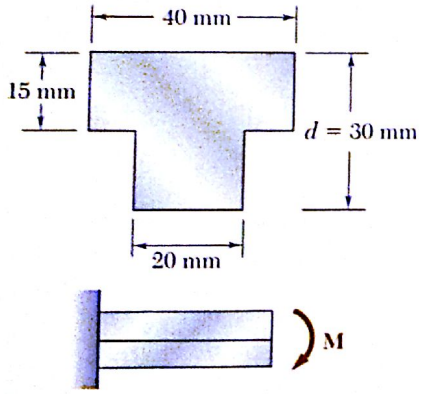


Figura P4.16

4.16 La viga mostrada en la figura está hecha de un nylon para el cual el esfuerzo permisible es de 24 MPa en tensión y de 30 MPa en compresión. Determine el máximo par M que puede aplicarse a la viga.

4.17 Retome el problema 4.16, y ahora suponga que $d = 40$ mm.

4.18 y *4.19* Si se sabe que para la viga extruida mostrada en la figura el esfuerzo permisible es de 120 MPa en tensión y de 150 MPa en compresión, determine el máximo par M que puede aplicarse.

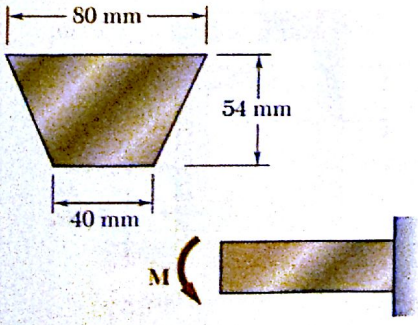


Figura P4.18

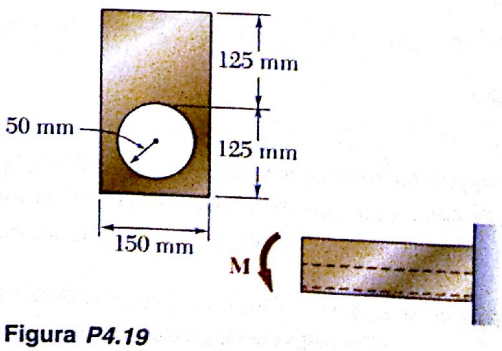


Figura *P4.19*

4.20 Si se sabe que para la viga mostrada en la figura el esfuerzo permisible es de 12 ksi en tensión y de 16 ksi en compresión, determine el máximo par **M** que puede aplicarse.

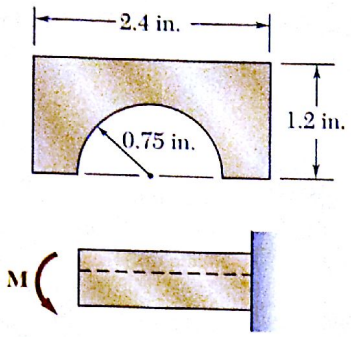


Figura P4.20

4.21 Una cinta de acero para sierra, que originalmente era recta, pasa sobre poleas de 8 in. de diámetro cuando está montada sobre una sierra de banda. Determine el esfuerzo máximo en la cinta, si se sabe que tiene 0.018 in. de grosor y 0.625 in. de ancho. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

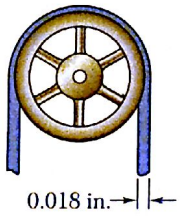


Figura P4.21

4.22 Si se sabe que $\sigma_{perm} = 24$ ksi para la tira de acero AB, determine *a*) el máximo par **M** que puede aplicarse, *b*) el radio de curvatura correspondiente. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.

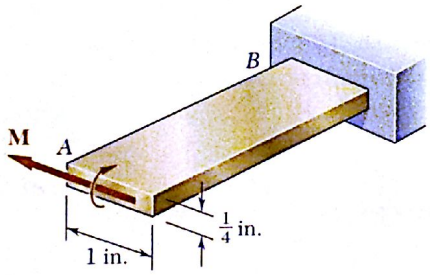


Figura P4.22

4.23 En ocasiones se almacenan varillas rectas de 6 mm de diámetro y 30 m de longitud enrollándolas dentro de un tambor con 1.25 m de diámetro interior. Si la resistencia a la cedencia no se excede, determine *a*) el esfuerzo máximo en una varilla enrollada, *b*) el momento flector correspondiente en la varilla. Utilice $E = 200$ GPa.

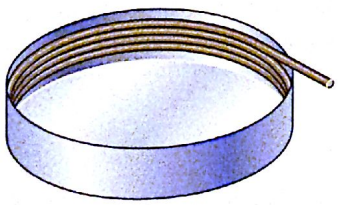


Figura P4.23

4.24 Un par de 200 kip · in. se aplica a la viga de acero laminado W8 × 31 que se muestra en la figura. *a*) Si el par se aplica alrededor del eje z como se muestra, determine el esfuerzo máximo y el radio de curvatura de la viga. *b*) Retome el inciso *a*), y ahora suponga que el par se aplica alrededor del eje y. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

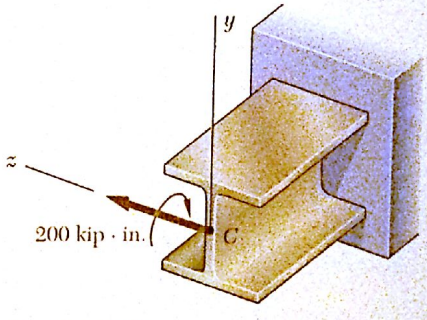


Figura *P4.24*

4.25 Un par de 60 N · m se aplica a la barra de acero mostrada en la figura. *a*) Si el par se aplica alrededor del eje *z*, como se muestra en la figura, determine el esfuerzo máximo y el radio de curvatura de la barra. *b*) Retome el inciso *a*), y ahora suponga que el par se aplica alrededor del eje *y*. Utilice $E = 200$ GPa.

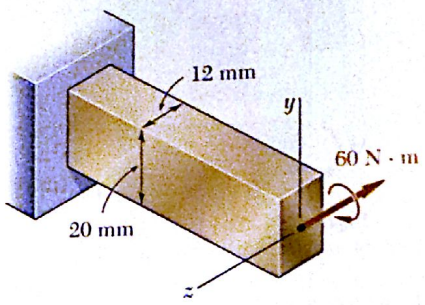


Figura P4.25

4.26 Un par de magnitud M se aplica a una barra cuadrada con lado a. Para cada una de las orientaciones mostradas en la figura, determine el esfuerzo máximo y la curvatura de la barra.

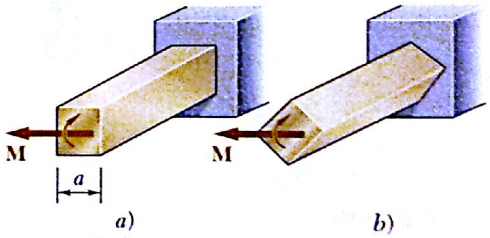


Figura *P4.26*

4.27 Una porción de una barra cuadrada se elimina por fresado, de tal manera que queda la sección transversal que se muestra en la figura. Después, la barra se flexiona alrededor de su diagonal horizontal con un par **M**. En el caso de que $h = 0.9h_0$, exprese el esfuerzo máximo en la barra en la forma $\sigma_m = k\sigma_0$ donde σ_0 es el esfuerzo máximo que se habría producido si la barra cuadrada original hubiera sido flexionada por el mismo par **M**, y determine el valor de k.

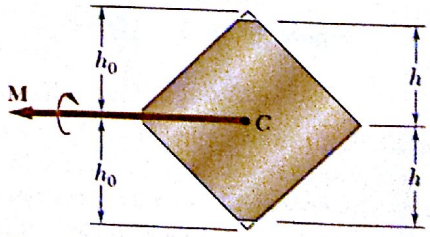


Figura P4.27

4.28 En el problema 4.27 determine *a*) el valor de h para el cual el esfuerzo máximo σ_m sea tan pequeño como sea posible, *b*) el valor correspondiente de k.

4.29 Una viga de acero laminado W200 × 31.3 se somete a un par **M** con un momento de 45 kN · m. Si se sabe que $E = 200$ GPa y que $\nu = 0.29$, determine *a*) el radio de curvatura ρ, *b*) el radio de curvatura ρ' para una sección transversal.

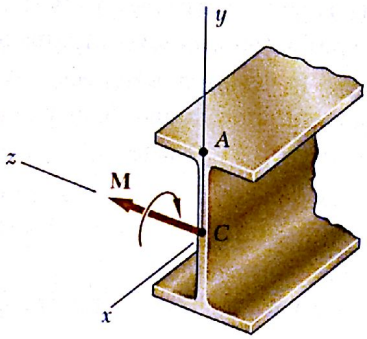


Figura P4.29

4.30 Para la barra y la carga del ejemplo 4.01, determine *a*) el radio de curvatura ρ, *b*) el radio de curvatura ρ' de una sección transversal, *c*) el ángulo entre los lados de la barra que originalmente eran verticales. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.29$.

4.31 Para la barra de aluminio y la carga del problema modelo 4.1, determine *a*) el radio de curvatura ρ' de la sección transversal, *b*) el ángulo entre los lados de la barra que originalmente eran verticales. Utilice $E = 10.6 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.33$.

4.32 En la sección 4.3 se supuso que los esfuerzos normales σ_y en un elemento sometido a flexión pura son despreciables. Para un elemento con sección rectangular inicial recta, *a*) deduzca una expresión aproximada para σ_y como función de y, *b*) demuestre que $(\sigma_y)_{\text{máx}} = -(c/2\rho)(\sigma_x)_{\text{máx}}$ y, así, que σ_y puede despreciarse en todas las situaciones prácticas. (*Sugerencia*: Considere el diagrama de cuerpo libre de la porción de la viga situada bajo la superficie de la ordenada y, y suponga que la distribución del esfuerzo σ_x es todavía lineal.)

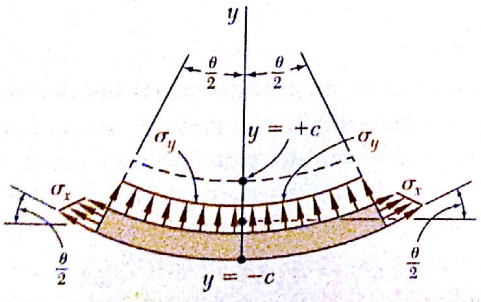


Figura P4.32

4.6 FLEXIÓN DE ELEMENTOS HECHOS DE VARIOS MATERIALES

Las deducciones de la sección 4.4 se basaban en la hipótesis de que el material era homogéneo, con un módulo dado de elasticidad E. Si el elemento sometido a flexión pura está hecho de dos o más materiales, con distintos módulos de elasticidad, la aproximación para la determinación de esfuerzos debe cambiar.

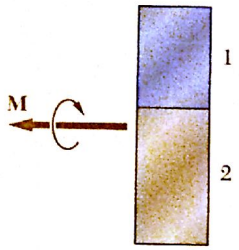


Figura 4.23

Considere, por ejemplo, una barra compuesta de dos porciones de diferentes materiales, unidos como muestra la sección transversal de la figura 4.23. Esta barra compuesta se deformará, como se dijo en la sección 4.3, puesto que su sección transversal permanece igual en toda su longitud, ya que en la sección 4.3 no se planteó hipótesis alguna sobre la relación esfuerzo-deformación unitaria del material o materiales. Así, la deformación normal ϵ_x todavía varía linealmente con la distancia y al eje neutro de la sección (figuras 4.24*a* y *b*) y la ecuación (4.8) rige:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{4.8}$$

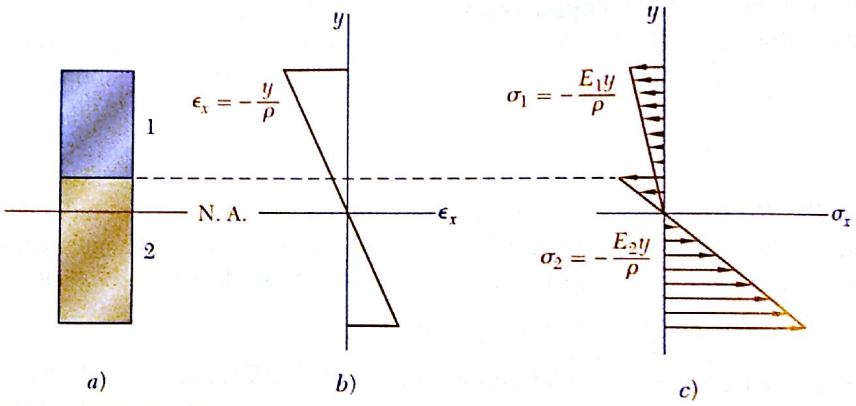


Figura 4.24 Distribución de esfuerzos y de deformaciones en una barra hecha de dos materiales.

Sin embargo, no puede suponerse que el eje neutro pasa por el centroide de la sección compuesta. Por ello, uno de los objetivos de este análisis es determinar la posición de dicho eje.

Como los módulos de elasticidad de los materiales E_1 y E_2 son diferentes, las expresiones obtenidas para los esfuerzos normales en cada material serán también diferentes. Al escribir

$$\sigma_1 = E_1\epsilon_x = -\frac{E_1 y}{\rho}$$
$$\sigma_2 = E_2\epsilon_x = -\frac{E_2 y}{\rho} \tag{4.24}$$

se obtiene una curva de distribución de esfuerzos que consiste en dos segmentos de línea recta (figura 4.24*c*). Se deduce, de las ecuaciones (4.24), que la fuerza dF_1 ejercida sobre un elemento de área dA de la porción superior de la sección es:

$$dF_1 = \sigma_1\, dA = -\frac{E_1 y}{\rho}\, dA \tag{4.25}$$

mientras que la fuerza dF_2 ejercida sobre un elemento de la misma área dA de la porción inferior es:

$$dF_2 = \sigma_2 dA = -\frac{E_2 y}{\rho} dA \tag{4.26}$$

Pero, llamando n la relación E_2/E_1 de los dos módulos de elasticidad, puede expresarse dF_2 como

$$dF_2 = -\frac{(nE_1)y}{\rho} dA = -\frac{E_1 y}{\rho} (n\, dA) \tag{4.27}$$

Comparando las ecuaciones (4.25) y (4.27), se nota que se ejercerá la misma fuerza dF_2 sobre un elemento de área $n\, dA$ del primer material. En otras palabras, la resistencia a la flexión de la barra permanecerá igual si ambas partes fueran hechas del primer material siempre que el ancho de cada elemento de la porción inferior fuera multiplicado por n. Note que este ensanchamiento (si $n > 1$) o estrechamiento (si $n < 1$) debe efectuarse *en dirección paralela al eje neutro de la sección* puesto que es esencial que la distancia y de cada elemento al eje neutro permanezca igual. La nueva sección transversal así obtenida se denomina *sección transformada* del elemento (figura 4.25).

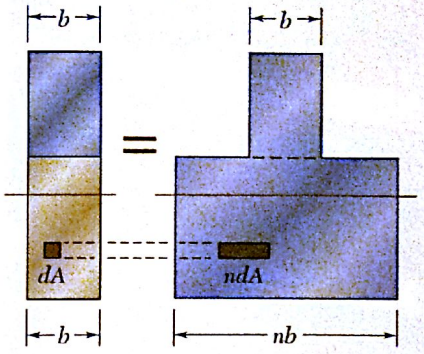


Figura 4.25 Sección transformada para una barra compuesta.

Puesto que la sección transformada representa la sección transversal de un elemento hecho de un *material homogéneo* con módulo elástico E_1, es posible utilizar el método descrito en la sección 4.4 para hallar el eje neutro de la sección y los esfuerzos normales en varios puntos de ella. El eje neutro se trazará *por el centroide de la sección transformada* (figura 4.26), y el esfuerzo σ_x, en cualquier punto del elemento homogéneo ficticio, se obtendrá de la ecuación (4.16)

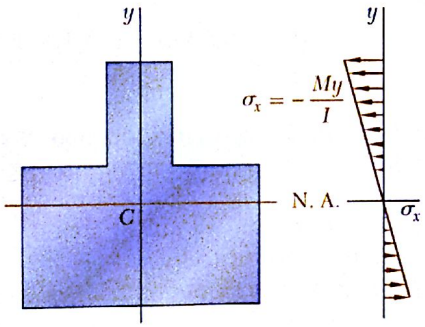


Figura 4.26 Distribución de esfuerzos en la sección transformada.

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

donde y es la distancia a la superficie neutra, e I el *momento de inercia de la sección transformada* con respecto a su eje centroidal.

Para obtener el esfuerzo σ_1 en un punto situado en la porción superior de la sección transversal de la barra compuesta original, simplemente se calculará el esfuerzo σ_x en el punto correspondiente de la sección transformada. Sin embargo, para obtener el esfuerzo σ_2 en un punto de la parte inferior de la sección, se *multiplicará por n* el esfuerzo σ_x calculado en el punto correspondiente de la sección transformada. En verdad, como se vio antes, la

misma fuerza elemental dF_2 se aplica a un elemento de área $n\,dA$ de la sección transformada y a un elemento de área dA de la sección original. Así, el esfuerzo σ_2 en un punto de la sección original debe ser n veces más grande que el esfuerzo en el punto correspondiente de la sección transformada.

Las deformaciones de un elemento compuesto también pueden hallarse usando la sección transformada. Recuerde que la sección transformada representa la sección transversal de un elemento hecho con un material homogéneo de módulo E_1, que se deforma de la misma manera que el elemento compuesto. Por lo tanto, utilizando la ecuación (4.21), se escribe que la curvatura del miembro compuesto es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I}$$

donde I es el momento de inercia de la sección transformada con respecto a su eje neutro.

EJEMPLO 4.03

Una barra obtenida uniendo piezas de acero ($E_s = 29 \times 10^6$ psi) y latón ($E_b = 15 \times 10^6$ psi) tiene la sección mostrada en la figura 4.27. Determine los esfuerzos máximos en el acero y el latón cuando la barra se somete a flexión pura con un momento $M = 40$ kips · in.

La sección transformada correspondiente a una barra equivalente hecha de latón se muestra en la figura 4.28. Puesto que

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{29 \times 10^6 \text{ psi}}{15 \times 10^6 \text{ psi}} = 1.933$$

el ancho de la porción central de latón que reemplaza el acero original se obtiene multiplicando por 1.933 el ancho original

$$(0.75 \text{ in.})(1.933) = 1.45 \text{ in.}$$

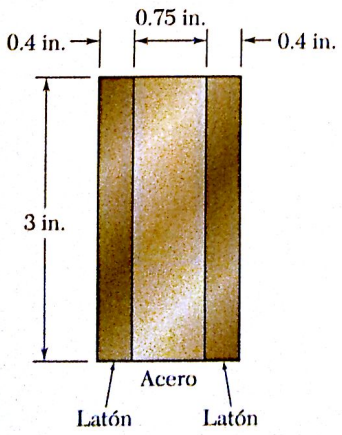


Figura 4.27

Se observa que este cambio en las dimensiones se produce en dirección paralela al eje neutro. El momento de inercia de la sección transformada con respecto al eje centroidal es

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(2.25 \text{ in.})(3 \text{ in.})^3 = 5.063 \text{ in.}^4$$

y la distancia máxima al eje neutro es $c = 1.5$ in. Usando la ecuación (4.15), se halla el esfuerzo máximo en la sección transformada:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(40 \text{ kips} \cdot \text{in.})(1.5 \text{ in.})}{5.063 \text{ in.}} = 11.85 \text{ ksi}$$

El valor obtenido representa también el esfuerzo máximo en la parte de latón de la barra compuesta original. El esfuerzo máximo en el acero, sin embargo, será mayor que el obtenido para la sección transformada, ya que el área de la porción central debe reducirse mediante el factor $n = 1.933$ cuando se retorne de la sección transformada a la original. Así se concluye que:

$$(\sigma_{\text{latón}})_{\text{máx}} = 11.85 \text{ ksi}$$
$$(\sigma_{\text{acero}})_{\text{máx}} = (1.933)(11.85 \text{ ksi}) = 22.9 \text{ ksi}$$

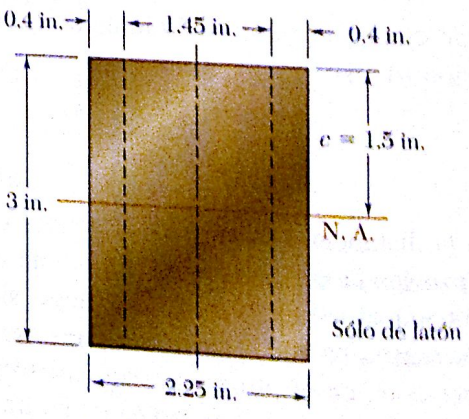
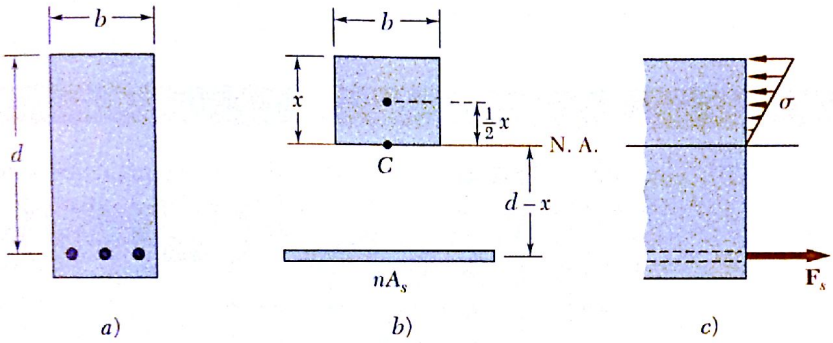


Figura 4.28

Un ejemplo importante de elementos estructurales hechos de dos materiales diferentes son *las vigas de concreto reforzado* (figura 4.29). Estas vigas, cuando se someten a momentos positivos, se refuerzan con barras de acero colocadas cerca de su cara inferior (figura 4.30*a*). Como el concreto sometido a tensión es muy débil, se agrietará bajo la superficie neutra y el acero tomará toda la carga de tensión, mientras que el concreto de la parte superior tomará la carga de compresión.

Para obtener la sección transformada de una viga de concreto reforzado, se reemplaza el área A_s de las barras de acero por un área equivalente nA_s, donde n es la razón E_s/E_c de los módulos de elasticidad del acero y del concreto (figura 4.30*b*). Por otra parte, como el concreto sólo actúa con eficiencia a compresión, únicamente la porción de la sección localizada por encima del eje neutro debe considerarse en la sección transformada.

Figura 4.29



a) *b)* *c)*

Figura 4.30

La posición del eje neutro se obtiene calculando la distancia x de la cara superior de la viga al centroide C de la sección transformada. Denotando por b el ancho de la viga, y d la distancia desde la cara superior al centroide de las barras de acero, se tiene que el primer momento de la sección transformada con respecto al eje neutro debe ser cero. Como el primer momento de cada una de las dos porciones de la sección transformada se obtiene multiplicando su área por la distancia de su centroide al eje neutro, se escribe:

$$(bx)\frac{x}{2} - nA_s(d - x) = 0$$

o

$$\frac{1}{2}bx^2 + nA_s x - nA_s d = 0 \tag{4.28}$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática para x, se obtiene la posición del eje neutro y la porción de la sección de la viga de concreto que se usa efectivamente.

La determinación de los esfuerzos en la sección transformada se realiza, como ya se explicó con anterioridad en esta sección (véase problema modelo 4.4). La distribución de esfuerzos de compresión en el concreto y la resultante $\mathbf{F}_s$ de las fuerzas de tensión en las barras de acero, se muestran en la figura 4.30*c*.

4.7 CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS

La ecuación $\sigma_m = Mc/I$ se dedujo en la sección 4.4 para el caso de un elemento con un plano de simetría y sección uniforme, y en la sección 4.5 se vio que era apropiada para toda la longitud del elemento sólo si los pares M y M′ se aplicaban mediante platinas rígidas y sin fricción. En otras condiciones de aplicación de las cargas se producirán concentraciones de esfuerzos cerca de los puntos de aplicación.

Esfuerzos más altos ocurrirán si la sección transversal del elemento experimenta cambios súbitos. Se han estudiado dos casos particulares de interés,† el caso de una barra plana con un cambio súbito de sección (ancho) y el caso de una barra plana con ranuras. Como la distribución de esfuerzos en las secciones transversales críticas sólo depende de la geometría del elemento, pueden determinarse los factores de concentración de esfuerzos para diferentes relaciones de los parámetros considerados y registrados, como en las

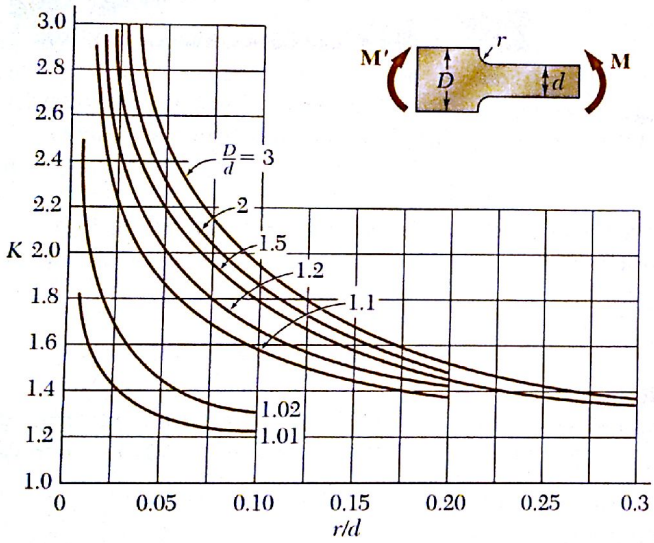


Figura 4.31 Factores de concentración de esfuerzos para *barras planas* con cambios de ancho sometidas a flexión pura.†

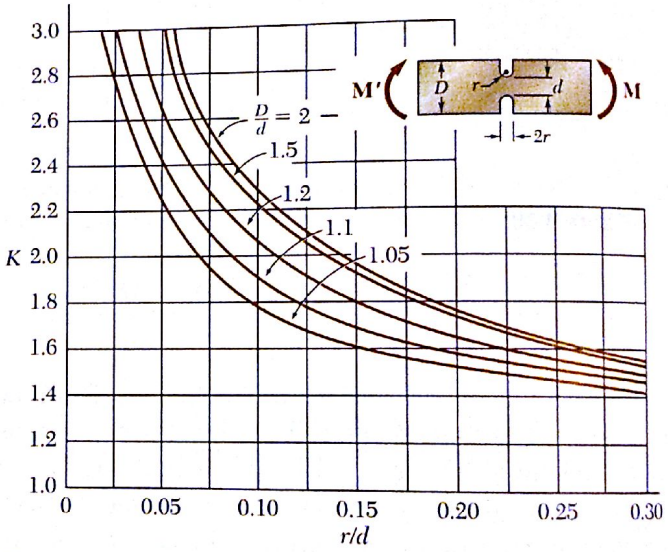


Figura 4.32 Factores de concentración de esfuerzos para barras planas con ranuras sometidas a flexión pura.†

† W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1997.

figuras 4.31 y 4.32. El valor del esfuerzo máximo en la sección puede expresarse como:

$$\sigma_m = K\frac{Mc}{I} \tag{4.29}$$

donde K es el factor de concentración de esfuerzos, y donde c e I se refieren a la sección crítica, es decir, a la sección de ancho d en los dos casos estudiados aquí. Un examen de las figuras 4.31 y 4.32 muestra claramente la importancia de usar soldaduras de filete y ranuras de radio r tan grandes como sea práctico.

Finalmente, se debe señalar que, como en el caso de la carga axial y la torsión, los valores de K se han calculado teniendo en cuenta la hipótesis de una relación lineal entre esfuerzo y deformación. En muchas aplicaciones se producirán deformaciones plásticas que se traducen en valores del esfuerzo máximo más bajos que los indicados por la ecuación (4.29).

EJEMPLO 4.04

Se van a maquinar ranuras de 10 mm de profundidad en una barra de acero de 60 mm de ancho y 9 mm de espesor (figura 4.33). Determine el ancho mínimo permisible de las ranuras si el esfuerzo en la barra no debe pasar de 150 MPa cuando el momento flector es de 180 N · m.

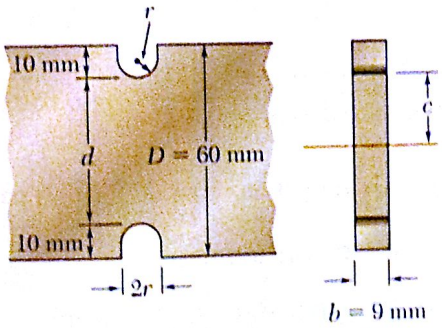


Figura 4.33

En la figura 4.33*a* se observa que:

$$d = 60\text{ mm} - 2(10\text{ mm}) = 40\text{ mm}$$
$$c = \tfrac{1}{2}d = 20\text{ mm} \qquad b = 9\text{ mm}$$

El momento de inercia de la sección crítica con respecto al eje neutro es:

$$I = \tfrac{1}{12}bd^3 = \tfrac{1}{12}(9 \times 10^{-3}\text{ m})(40 \times 10^{-3}\text{ m})^3$$
$$= 48 \times 10^{-9}\text{ m}^4$$

El valor del esfuerzo Mc/I es entonces:

$$\frac{Mc}{I} = \frac{(180\text{ N} \cdot \text{m})(20 \times 10^{-3}\text{ m})}{48 \times 10^{-9}\text{ m}^4} = 75\text{ MPa}$$

Sustituyendo este valor por Mc/I en la ecuación (4.29) y haciendo $\sigma_m = 150$ MPa, se escribe

$$150\text{ MPa} = K(75\text{ MPa})$$
$$K = 2$$

Por otra parte

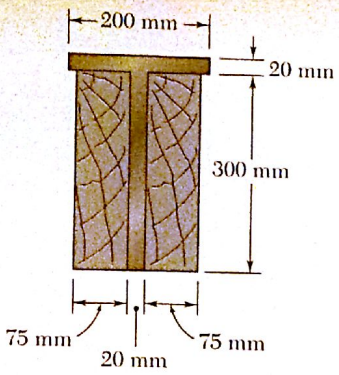
$$\frac{D}{d} = \frac{60\text{ mm}}{40\text{ mm}} = 1.5$$

Usando la curva de la figura 4.32, correspondiente a $D/d = 1.5$, se encuentra que el valor $K = 2$ corresponde a un valor de r/d igual a 0.13. Se tiene, por lo tanto,

$$\frac{r}{d} = 0.13$$
$$r = 0.13d = 0.13(40\text{ mm}) = 5.2\text{ mm}$$

El mínimo ancho permisible de las ranuras es entonces

$$2r = 2(5.2\text{ mm}) = 10.4\text{ mm}$$



PROBLEMA MODELO 4.3

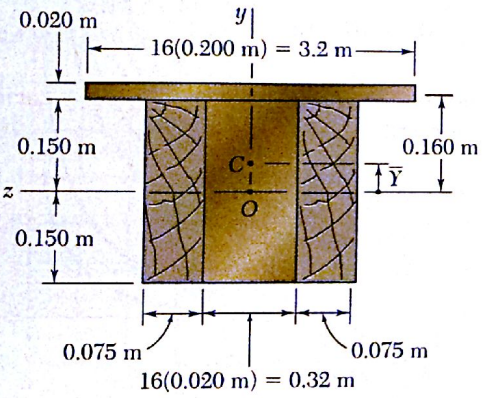
Una viga de acero en T se ha reforzado poniéndole los dos pedazos de madera que se muestran en la figura. El módulo de elasticidad es 12.5 GPa para la madera y 200 GPa para el acero. Considerando que se aplica un momento flector $M = 50\ \text{kN} \cdot \text{m}$ a la viga compuesta, halle *a*) el esfuerzo máximo en la madera, *b*) el esfuerzo en el acero a lo largo de la fibra externa.

SOLUCIÓN

Sección transformada. Primero se calcula la razón

$$n = \frac{E_s}{E_w} = \frac{200\ \text{GPa}}{12.5\ \text{GPa}} = 16$$

Multiplicando las dimensiones horizontales de la porción de acero para $n = 16$, se obtiene una sección transformada enteramente de madera.

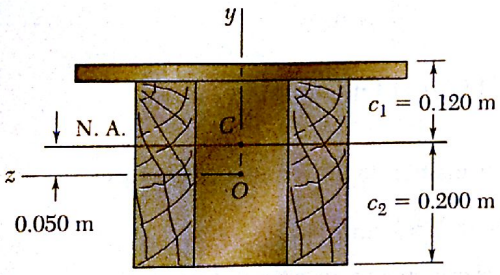


Eje neutro. Pasa por el centroide de la sección transformada. Como la sección consta de dos rectángulos, se tiene

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} = \frac{(0.160\ \text{m})(3.2\ \text{m} \times 0.020\ \text{m}) + 0}{3.2\ \text{m} \times 0.020\ \text{m} + 0.470\ \text{m} \times 0.300\ \text{m}} = 0.050\ \text{m}$$

Momento centroidal de inercia. Usando el teorema de los ejes paralelos:

$$I = \tfrac{1}{12}(0.470)(0.300)^3 + (0.470 \times 0.300)(0.050)^2$$
$$+ \tfrac{1}{12}(3.2)(0.020)^3 + (3.2 \times 0.020)(0.160 - 0.050)^2$$
$$I = 2.19 \times 10^{-3}\ \text{m}^4$$



***a*) Máximo esfuerzo de la madera.** La madera más alejada del eje neutro se localiza a lo largo del borde de la base, donde $c_2 = 0.200$ m.

$$\sigma_w = \frac{Mc_2}{I} = \frac{(50 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m})(0.200\ \text{m})}{2.19 \times 10^{-3}\ \text{m}^4}$$

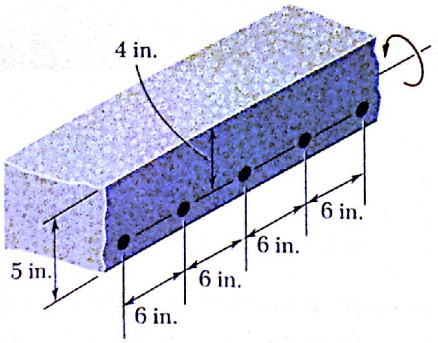
$$\sigma_w = 4.57\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

***b*) Esfuerzo en el acero.** A lo largo del borde superior $c_1 = 0.120$ m. De la sección transformada se obtiene un esfuerzo equivalente en la madera, que debe multiplicarse por n para obtener el esfuerzo en el acero.

$$\sigma_s = n\frac{Mc_1}{I} = (16)\frac{(50 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m})(0.120\ \text{m})}{2.19 \times 10^{-3}\ \text{m}^4}$$

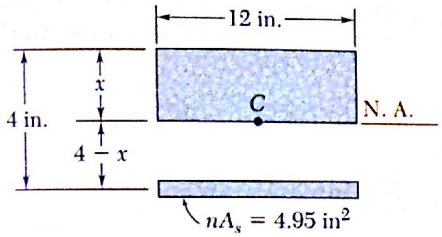
$$\sigma_s = 43.8\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA MODELO 4.4



Una losa de concreto para piso está reforzada por varillas de acero de $\frac{5}{8}$ in. de diámetro colocadas a 1.5 in. por encima de la cara inferior de la losa y espaciadas 6 in. entre centros. El módulo de elasticidad es de 3.6×10^6 psi para el concreto utilizado y de 29×10^6 psi para el acero. Considerando que un momento flector de 40 kips · in. se aplica a cada tramo de 1 ft de ancho de la losa, determine *a*) el esfuerzo máximo en el concreto, *b*) el esfuerzo en el acero.

SOLUCIÓN



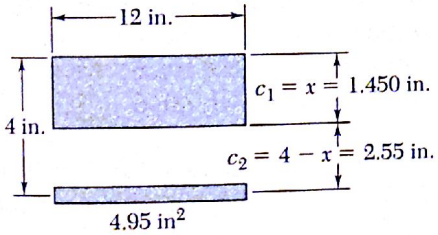
Sección transformada. Considere una porción de la losa de 12 in. de ancho, en la que hay dos varillas de $\frac{5}{8}$ in. de diámetro que tienen un área total de sección transversal

$$A_s = 2\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{8}\text{ in.}\right)^2\right] = 0.614\text{ in.}^2$$

Ya que el concreto trabaja sólo en compresión, todas las fuerzas de tensión las soportan las varillas de acero, y la sección transformada consiste en las dos áreas mostradas en la figura. Una es la porción del concreto en compresión (situada por encima del eje neutro) y la otra es el área transformada de acero nA_s. Se tiene

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{29 \times 10^6\text{ psi}}{3.6 \times 10^6\text{ psi}} = 8.06$$

$$nA_s = 8.06(0.614\text{ in.}^2) = 4.95\text{ in.}^2$$



Eje neutro. El eje neutro de la losa pasa a través del centroide de la sección transformada. Sumando los momentos del área transformada alrededor del eje neutro, se tiene que

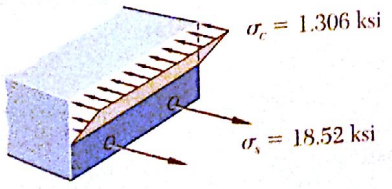
$$12x\left(\frac{x}{2}\right) - 4.95(4 - x) = 0 \qquad x = 1.450\text{ in.}$$

Momento de inercia. El momento centroidal de inercia del área transformada es

$$I = \tfrac{1}{3}(12)(1.450)^3 + 4.95(4 - 1.450)^2 = 44.4\text{ in.}^4$$

***a*) Esfuerzo máximo en el concreto.** En la parte superior de la losa, se tiene $c_1 = 1.450$ in., y

$$\sigma_c = \frac{Mc_1}{I} = \frac{(40\text{ kips} \cdot \text{in.})(1.450\text{ in.})}{44.4\text{ in.}^4} \qquad \sigma_c = 1.306\text{ ksi} \blacktriangleleft$$



***b*) Esfuerzo en el acero.** Para el acero, se tiene $c_2 = 2.55$ in., $n = 8.06$ y

$$\sigma_s = n\frac{Mc_2}{I} = 8.06\frac{(40\text{ kips} \cdot \text{in.})(2.55\text{ in.})}{44.4\text{ in.}^4} \qquad \sigma_s = 18.52\text{ ksi} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

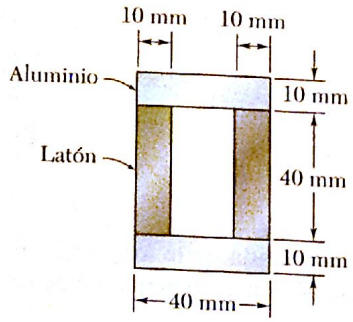


Figura P4.33

4.33 y *4.34* Una barra que tiene la sección transversal mostrada en la figura se forma al unir fuertemente piezas de latón y aluminio. Con los datos que se presentan a continuación, determine el momento flector máximo permisible cuando la barra compuesta se flexiona alrededor de un eje horizontal.

	Aluminio	Latón
Módulo de elasticidad	70 GPa	105 GPa
Esfuerzo permisible	100 MPa	160 MPa

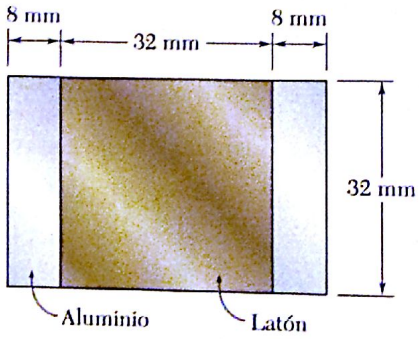


Figura *P4.34*

4.35 y 4.36 Para la barra compuesta que se indica, determine el momento flector máximo permisible cuando la barra se dobla alrededor de un eje vertical.

4.35 Barra del problema 4.33.

4.36 Barra del problema 4.34.

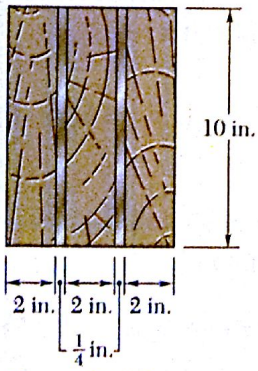


Figura P4.37

4.37 Tres vigas de madera y dos placas de acero se unen fuertemente con pernos para formar el elemento compuesto que se muestra en la figura. Con los datos que se dan a continuación, determine el momento flector máximo permisible cuando el elemento compuesto se dobla alrededor de un eje horizontal.

	Madera	Acero
Módulo de elasticidad	2×10^6 psi	30×10^6 psi
Esfuerzo permisible	2 000 psi	22 000 psi

4.38 Para el elemento compuesto del problema 4.37, determine el momento flector máximo permisible cuando el elemento se flexiona alrededor de un eje vertical.

4.39 y 4.40 Una barra de acero (E_s = 210 GPa) y una barra de aluminio (E_a = 70 GPa) se unen para formar la barra compuesta mostrada en la figura. Si la barra se dobla alrededor de un eje horizontal mediante un par con M = 200 N · m, determine el esfuerzo máximo en *a*) la barra de aluminio, *b*) la barra de acero.

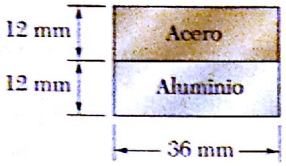


Figura P4.39

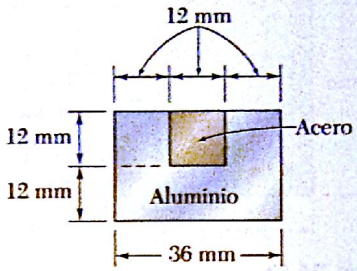


Figura P4.40

4.41 y *4.42* La viga de madera de 6 × 12 in. se ha reforzado atornillándola a las tiras de acero que se muestran en la figura. El módulo de elasticidad de la madera es de 1.8 × 10^6 psi y el del acero de 29 × 10^6 psi. Si se sabe que la viga se dobla alrededor de un eje horizontal mediante un par con momento M = 450 kip · in., determine el esfuerzo máximo en *a*) la madera, *b*) el acero.

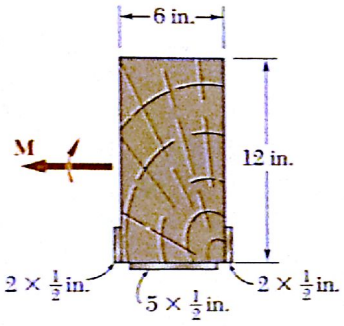


Figura P4.41

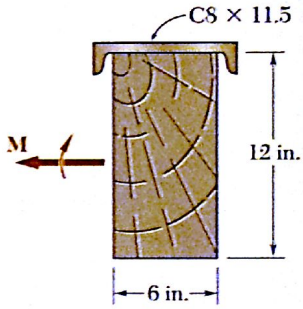


Figura *P4.42*

4.43 y 4.44 Para la barra compuesta que se indica, determine el radio de curvatura causado por un par con momento de 200 N · m.

4.43 Barra del problema 4.39.

4.44 Barra del problema 4.40.

4.45 y *4.46* Para la viga compuesta indicada, determine el radio de curvatura causado por un par con momento de 450 kip · in.

4.45 Barra del problema 4.41.

4.46 Barra del problema 4.42.

4.47 Una viga de concreto se refuerza con tres varillas de acero colocadas como se muestra en la figura. El módulo de elasticidad es de 3 × 10^6 psi para el concreto y de 30 × 10^6 psi para el acero. Con un esfuerzo permisible de 1 350 psi para el concreto y de 20 ksi para el acero, determine el momento flector máximo positivo permisible en la viga.

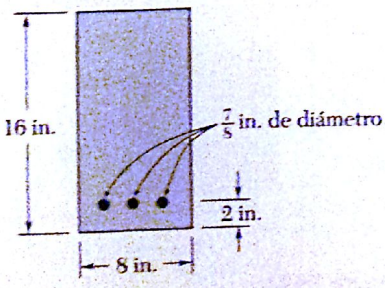


Figura P4.47

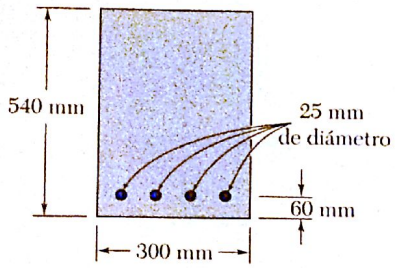


Figura P4.48

4.48 La viga de concreto reforzado que se observa en la figura se sujeta a un momento flector positivo de 175 kN · m. Si se sabe que el módulo de elasticidad es de 25 GPa para el concreto y de 200 GPa para el acero, determine *a*) el esfuerzo en el acero, *b*) el esfuerzo máximo en el concreto.

4.49 Retome el problema 4.48, y ahora suponga que el ancho de 300 mm de la viga se incrementa a 350 mm.

4.50 Una dala de concreto está reforzada con varillas de $\frac{5}{8}$ in. de diámetro colocadas sobre centros ubicados cada 5.5 in. como se muestra en la figura. El módulo de elasticidad es de 3×10^6 psi para el concreto y de 29×10^6 psi para el acero. Con un esfuerzo permisible de 1400 psi para el concreto y 20 ksi para el acero, determine el máximo momento flector por pie de anchura que puede aplicarse con seguridad a la dala.

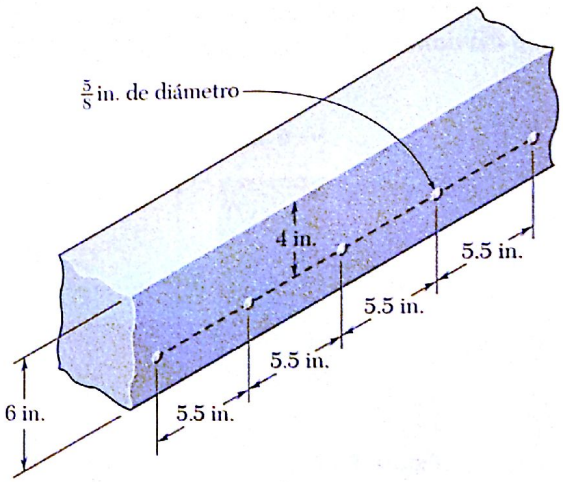


Figura *P4.50*

4.51 Si se sabe que el momento flector en la viga de concreto reforzado que se muestra en la figura es de +150 kip · ft y que el módulo de elasticidad es de 3.75×10^6 psi para el concreto y de 30×10^6 psi para el acero, determine *a*) el esfuerzo en el acero, *b*) el esfuerzo máximo en el concreto.

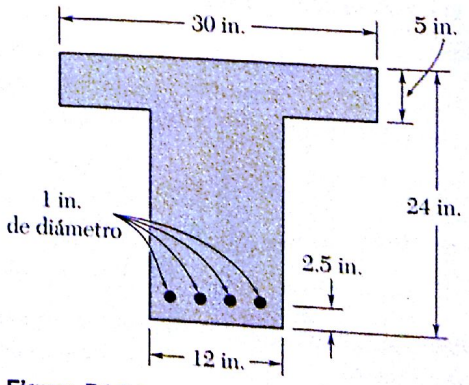


Figura P4.51

4.52 El diseño de una viga de concreto reforzado se considera *balanceado* si los esfuerzos máximos en el acero y en el concreto son iguales, respectivamente, a los esfuerzos permisibles σ_s y σ_c. Muestre que para lograr un diseño balanceado la distancia x desde la parte superior de la viga al eje neutro debe ser

$$x = \frac{d}{1 + \dfrac{\sigma_s E_c}{\sigma_c E_s}}$$

donde E_c y E_s son los módulos de elasticidad del concreto y del acero, respectivamente, y d es la distancia desde la parte superior de la viga al reforzamiento de acero.

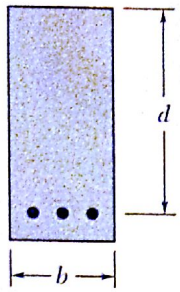


Figura P4.52

4.53 Para la viga de concreto que se muestra en la figura, el módulo de elasticidad es de 25 GPa para el concreto y de 200 GPa para el acero. Si se sabe que $b = 200$ mm y $d = 450$ mm, y que el esfuerzo permisible para el concreto es de 12.5 MPa y de 140 MPa para el acero, determine *a*) el área requerida A_s para el refuerzo de acero si el diseño de la viga debe estar balanceado, *b*) el momento flector máximo permisible. (Vea el problema 4.52 para la definición de una viga balanceada.)

4.54 Para la viga de concreto que se muestra en la figura, el módulo de elasticidad es de 3.5×10^6 psi para el concreto y de 29×10^6 psi para el acero. Si se sabe que $b = 8$ in. y $d = 22$ in., y que el esfuerzo permisible para el concreto es de 1 800 psi y de 20 ksi para el acero, determine *a*) el área requerida A_s para el refuerzo de acero si el diseño de la viga debe estar balanceado, *b*) el momento flector máximo permisible. (Vea el problema 4.52 para la definición de una viga balanceada.)

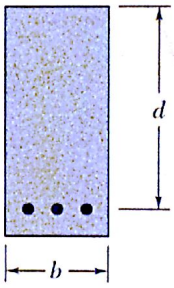


Figura P4.53 y *P4.54*

4.55 y 4.56 Cinco tiras de metal, cada una de ellas con una sección transversal de 15 × 45 mm, se unen para formar la viga compuesta que se muestra en la figura. El módulo de elasticidad es de 210 GPa para el acero, 105 GPa para el latón y 70 GPa para el aluminio. Si la viga se flexiona alrededor de un eje horizontal mediante un par con momento de 1 400 N · m, determine *a*) el esfuerzo máximo en cada uno de los tres metales, *b*) el radio de curvatura de la viga compuesta.

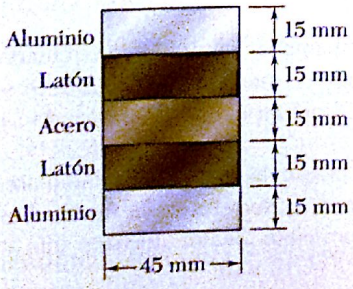


Figura P4.55

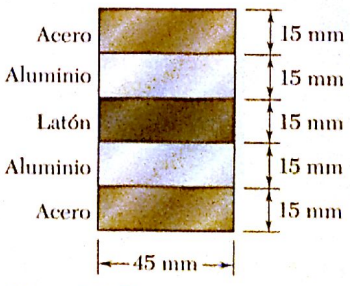


Figura P4.56

4.57 Un tubo de acero y uno de aluminio se unen fuertemente para formar la viga compuesta que se muestra en la figura. El módulo de elasticidad es de 30×10^6 psi para el acero y de 10×10^6 psi para el aluminio. Si se sabe que la viga compuesta se flexiona mediante un par con momento de 5 kip · in., determine el esfuerzo máximo *a*) en el aluminio, *b*) en el acero.

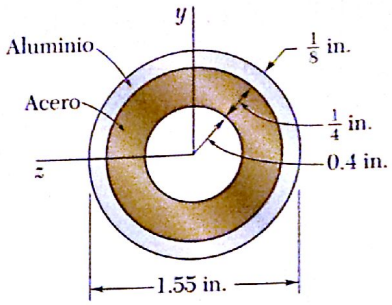


Figura P4.57

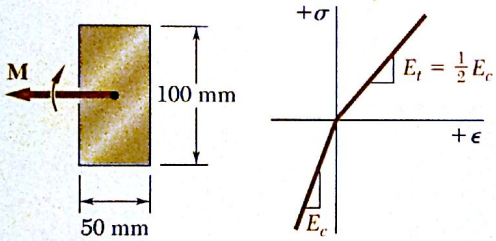


Figura P4.59

4.58 Retome el problema 4.57, y ahora suponga que el tubo interior de $\frac{1}{4}$ in. de espesor es de aluminio y que el tubo exterior de $\frac{1}{8}$ in. de espesor es de acero.

4.59 La viga rectangular que se muestra en la figura está hecha de un plástico para el cual el valor del módulo de elasticidad en tensión es la mitad del valor del módulo de elasticidad a compresión. Para un momento flector $M = 600$ N · m, determine el máximo *a*) esfuerzo de tensión, *b*) esfuerzo de compresión.

***4.60** Una viga rectangular está hecha de un material para el cual el módulo de elasticidad es E_t a tensión y E_c a compresión. Muestre que la curvatura de la viga en flexión pura es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_r I}$$

donde

$$E_r = \frac{4E_tE_c}{\left(\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c}\right)^2}$$

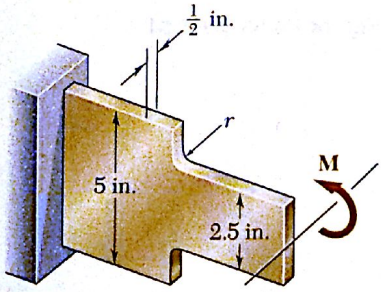


Figura P4.61 y P4.62

4.61 Si se sabe que el esfuerzo permisible para la viga mostrada en la figura es de 12 ksi, determine el momento flector permisible M cuando el radio r de los filetes es de *a*) $\frac{1}{2}$ in., *b*) $\frac{3}{4}$ in.

4.62 Si se sabe que $M = 3$ kip · in., determine el esfuerzo máximo en la viga que se muestra en la figura cuando el radio r de los filetes es de *a*) $\frac{1}{4}$ in., *b*) $\frac{1}{2}$ in.

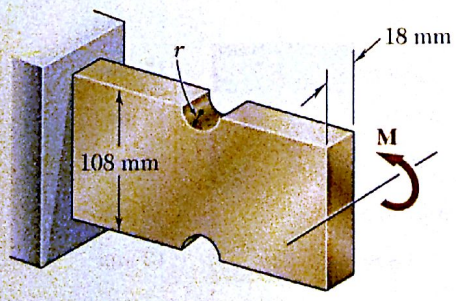
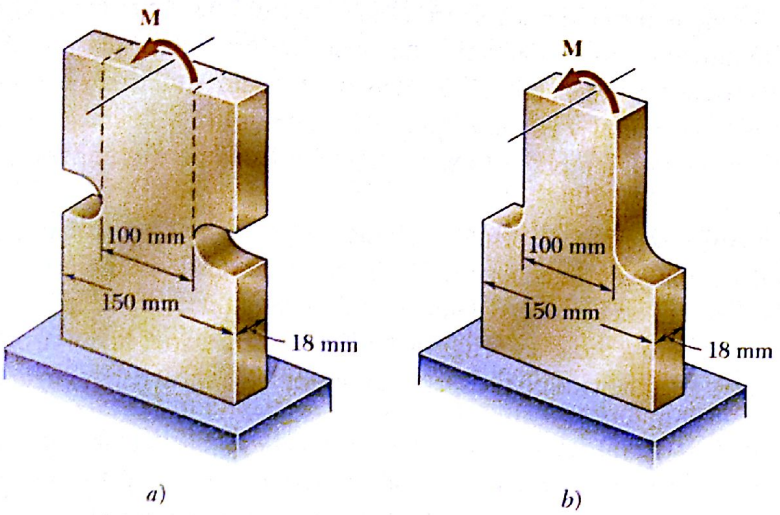


Figura *P4.63* y P4.64

4.63 Es necesario maquinar ranuras semicirculares con radio r en los lados de un elemento de acero como se muestra en la figura. Si se sabe que $M = 450$ N · m, determine el esfuerzo máximo en el elemento cuando *a*) $r = 9$ mm, *b*) $r = 18$ mm.

4.64 Es necesario maquinar ranuras semicirculares con radio r en los lados de un elemento de acero como se muestra en la figura. Con un esfuerzo permisible de 60 MPa, determine el momento flector máximo que puede aplicarse al elemento cuando *a*) $r = 9$ mm, *b*) $r = 18$ mm.

4.65 Un par con momento $M = 2$ kN · m se aplicará al extremo de una barra de acero. Determine el esfuerzo máximo en la barra *a*) si la barra se diseña con ranuras semicirculares de radio $r = 10$ mm, como se muestra en la figura 4.65*a*; *b*) si la barra se rediseña para eliminar el material por encima de las ranuras, como se muestra en la figura P4.65*b*.



a) *b*)

Figura *P4.65* y P4.66

4.66 El esfuerzo permisible utilizado en el diseño de una barra de acero es de 80 MPa. Determine el máximo par **M** que puede aplicarse a la barra *a*) si ésta se diseña con ranuras que tienen porciones semicirculares de radio $r = 15$ mm, como se muestra en la figura P4.65*a*; *b*) si la barra se rediseña para eliminar el material por encima de las ranuras, como se muestra en la figura P4.65*b*.

*4.8 DEFORMACIONES PLÁSTICAS

Cuando se dedujo la relación fundamental $\sigma_x = -My/I$ en la sección 4.4, se supuso que la ley de Hooke era aplicable a todo el elemento. Si se excede el límite de cedencia en alguna parte del elemento, o si el material es frágil y tiene un diagrama esfuerzo-deformación no lineal, dicha relación se invalida. El objetivo de esta sección es desarrollar un método más general para determinar la distribución de esfuerzos en un elemento sometido a flexión pura, método que puede usarse cuando la ley de Hooke no es aplicable.

Recuerde primero que cuando se probó, en la sección 4.3, que la deformación normal ϵ_x varía linealmente con la distancia y desde la superficie neutra, no se supuso una relación específica esfuerzo-deformación. Por tanto, aún puede usarse esa propiedad en el presente análisis y escribir

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_m \tag{4.10}$$

donde y es la distancia del punto estudiado a la superficie neutra, y c el valor máximo de y.

Sin embargo, no es posible seguir suponiendo que, en una sección dada, el eje neutro pasa por el centroide de dicha sección, puesto que esta propiedad se obtuvo en la sección 4.4, bajo la hipótesis de deformación elástica. En general, el eje neutro debe localizarse por aproximaciones sucesivas, hasta hallar una distribución de esfuerzos que satisfaga las ecuaciones (4.1) y (4.3) de la sección 4.2. En el caso particular de un elemento que posee un plano horizontal y un plano vertical de simetría y esté hecho de un material caracterizado por la misma relación esfuerzo-deformación a tensión y a compresión, el eje neutro coincidirá con el eje longitudinal de simetría de la sección. Ciertamente, las propiedades del material requieren que los esfuerzos sean simétricos con respecto al eje neutro, es decir, simétricos con respecto a *algún* eje horizontal y es claro que esto se cumplirá y la ecuación (4.1) se satisfará al mismo tiempo, sólo si ese eje es el mismo eje horizontal de simetría.

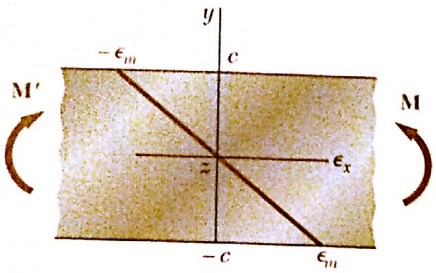


Figura 4.34

El análisis se limitará primero al caso especial que se acaba de describir. La distancia y en la ecuación (4.10) se mide desde el eje horizontal de simetría z en la sección transversal, y la distribución de ϵ_x es lineal y simétrica con respecto a dicho eje (figura 4.34). Por otra parte, la curva esfuerzo-deformación es simétrica con respecto al origen de coordenadas (figura 4.35).

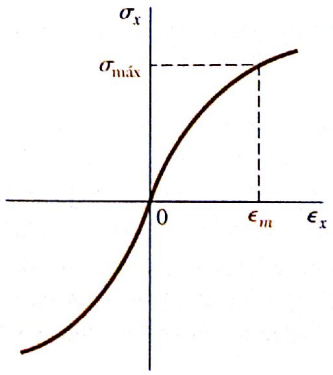


Figura 4.35

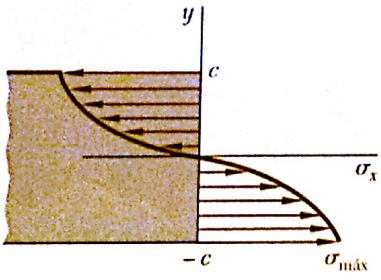


Figura 4.36

La distribución de esfuerzos en la sección transversal del elemento, es decir, la gráfica de σ_x contra y, se obtiene como sigue. Suponiendo que $\sigma_{máx}$ se ha especificado, se determina el valor correspondiente de ϵ_m del diagrama esfuerzo-deformación y se lleva este valor a la ecuación (4.10). Luego, por cada valor de y, se halla el correspondiente de ϵ_x en la ecuación (4.10) o la figura 4.34, y se obtiene del diagrama esfuerzo-deformación de la figura 4.35, el esfuerzo σ_x correspondiente al valor ϵ_x. Graficando σ_x contra y se genera la distribución de esfuerzos deseados (figura 4.36).

Recuerde ahora que, cuando se dedujo la ecuación (4.3) en la sección 4.2, no se supuso una relación particular entre esfuerzo y deformación. Puede usarse, entonces, la ecuación (4.3) para calcular el momento flector M que corresponde a la distribución de esfuerzos obtenida en la figura 4.36. Considerando el caso particular de un elemento que tiene una sección rectangular de ancho b, el elemento de área en la ecuación (4.3) se expresa como $dA = b\,dy$ y se tiene:

$$M = -b\int_{-c}^{c} y\sigma_x\,dy \tag{4.30}$$

donde σ_x es la función de y graficada en la figura 4.36. Como σ_x es una función impar de y, la ecuación (4.30) se escribe en la forma

$$M = -2b\int_0^c y\sigma_x\,dy \tag{4.31}$$

Si σ_x es una función analítica conocida de ϵ_x, es posible usar la ecuación (4.10) para expresar σ_x como función de y, y la integral en (4.31) puede hallarse analíticamente. De otra manera, el momento flector M puede obtenerse por integración numérica. Este cálculo se torna más significativo si se advierte que la integral de la ecuación (4.31) representa el primer momento con respecto al eje horizontal del área de la figura 4.36 que se ubica por encima del eje horizontal y se limita por la curva de distribución del esfuerzo y el eje vertical.

Un valor importante del momento flector es el momento último M_U que causa la falla del elemento. Su valor puede obtenerse a partir del esfuerzo último del material σ_U escogiendo $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_U$ y completando los cálculos que se indicaron antes. Sin embargo, es más conveniente en la práctica determinar M_U experimentalmente utilizando una muestra del material. Suponiendo una distribución lineal de esfuerzos ficticia, la ecuación (4.15) se usa para hallar el esfuerzo máximo correspondiente R_B:

$$R_B = \frac{M_U c}{I} \tag{4.32}$$

El esfuerzo ficticio R_B es el *módulo de ruptura al flexionar* el material dado. Puede usarse para calcular el momento de flexión último M_U de un elemento del mismo material, cuya sección transversal tiene la misma forma, pero

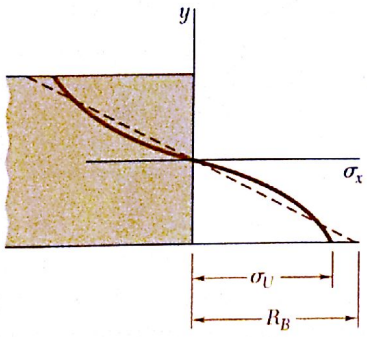


Figura 4.37

dimensiones diferentes, resolviendo la ecuación (4.32) para M_U. Como en el caso de un elemento con una sección rectangular, las distribuciones de esfuerzos, real y ficticia, que se muestran en la figura 4.37 deben generar el mismo valor M_U para el momento último y las áreas que ellas definen deben tener igual el primer momento con respecto al eje horizontal. Es claro que el módulo de ruptura R_B será siempre mayor que la resistencia real σ_U.

*4.9 ELEMENTOS HECHOS DE MATERIAL ELASTOPLÁSTICO

Con el fin de ofrecer una mejor visión de la conducta plástica de un material sometido a flexión, se analizará el caso de un elemento hecho de *material elastoplástico* suponiéndose primero que el elemento tiene más *sección rectangular* de ancho b y altura $2c$ (figura 4.38). Recuerde de la sección 2.17, que el diagrama esfuerzo-deformación para un material elastoplástico es el de la figura 4.39.

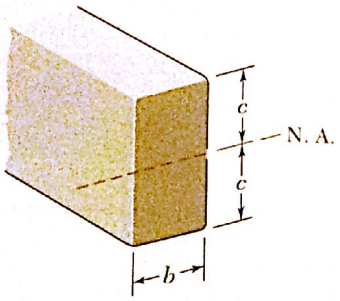


Figura 4.38

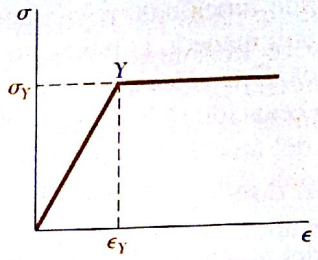


Figura 4.39

Mientras σ_x no excede el límite de fluencia σ_Y, se aplica la ley de Hooke, y la distribución de esfuerzos es lineal (figura 4.40*a*). El esfuerzo máximo es

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

Cuando el momento flector aumenta, σ_m alcanza eventualmente el valor σ_Y (figura 4.40*b*). Sustituyendo este valor en la ecuación (4.15), y resolviendo para M, se obtiene el valor M_Y del momento flector en el inicio de la fluencia:

$$M_Y = \frac{I}{c}\sigma_Y \tag{4.33}$$

El momento M_Y es el *máximo momento elástico* ya que es el mayor momento para el cual la deformación permanece completamente elástica. Recordando que, para la sección rectangular considerada,

$$\frac{I}{c} = \frac{b(2c)^3}{12c} = \frac{2}{3}bc^2 \tag{4.34}$$

se escribe

$$M_Y = \frac{2}{3}bc^2\sigma_Y \tag{4.35}$$

Si el momento flector sigue aumentando, se desarrollan zonas plásticas en el elemento que tienen el esfuerzo uniformemente igual a $-\sigma_Y$ en la zona superior y a $+\sigma_Y$ en la inferior (figura 4.40*c*). Entre las zonas plásticas subsiste un núcleo elástico en el cual σ_x varía linealmente con y,

$$\sigma_x = -\frac{\sigma_Y}{y_Y}y \tag{4.36}$$

donde y_Y representa la mitad del espesor del núcleo elástico. Cuando M aumenta, la zona plástica se expande hasta que, en el límite, la deformación es completamente plástica (figura 4.40*d*).

Se usará la ecuación (4.31) para hallar el valor del momento flector M que corresponde a un espesor $2y_Y$ del núcleo elástico. Recordando que σ_x es-

tá dado por la ecuación (4.36) para $0 \le y \le y_Y$, y es igual a $-\sigma_Y$ para $y_Y \le y \le c$, se escribe:

$$M = -2b \int_0^{y_Y} y\left(-\frac{\sigma_Y}{y_Y} y\right) dy - 2b \int_{y_Y}^{c} y(-\sigma_Y)\, dy$$

$$= \frac{2}{3} b y_Y^2 \sigma_Y + bc^2\sigma_Y - by_Y^2\sigma_Y$$

$$M = bc^2\sigma_Y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right) \tag{4.37}$$

o, a partir de la ecuación 4.35,

$$M = \frac{3}{2} M_Y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right) \tag{4.38}$$

donde M_Y es el momento elástico máximo. Se observa que cuando y_Y se aproxima a cero, el momento flector tiende a

$$M_p = \frac{3}{2} M_Y \tag{4.39}$$

Este valor del momento flector, que corresponde a una deformación completamente plástica (figura 4.40*d*), es el *momento plástico* del elemento estudiado. Note que la ecuación (4.39) es válida sólo para *elementos de sección rectangular hechos de material elastoplástico.*

Debe tenerse claro que la distribución de las *deformaciones* a través de la sección permanece lineal después de la fluencia. Por tanto, la ecuación (4.8) de la sección 4.3 es aún válida y puede usarse para obtener el semiespesor y_Y del núcleo elástico. Se tiene

$$y_Y = \epsilon_Y \rho \tag{4.40}$$

donde ϵ_Y es la deformación de fluencia y ρ el radio de curvatura correspondiente a un momento $M \ge M_Y$. Cuando el momento flector es igual a M_Y, se tiene $y_Y = c$ y la ecuación (4.40) resulta en

$$c = \epsilon_Y \rho_Y \tag{4.41}$$

donde ρ_Y es el radio de curvatura correspondiente al momento elástico máximo M_Y. Dividiendo miembro a miembro (4.40) entre (4.41), se obtiene la relación†

$$\frac{y_Y}{c} = \frac{\rho}{\rho_Y} \tag{4.42}$$

Sustituyendo por y_Y/c, de la ecuación (4.42), en la ecuación (4.38) se expresa el momento flector M como función de radio de curvatura ρ de la superficie neutra:

$$M = \frac{3}{2} M_Y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\rho^2}{\rho_Y^2}\right) \tag{4.43}$$

Debe notarse que la ecuación (4.43) sólo es válida después del inicio de la fluencia, es decir, para valores de M mayores que M_Y. Para $M < M_Y$ debe usarse la ecuación (4.21) de la sección 4.4.

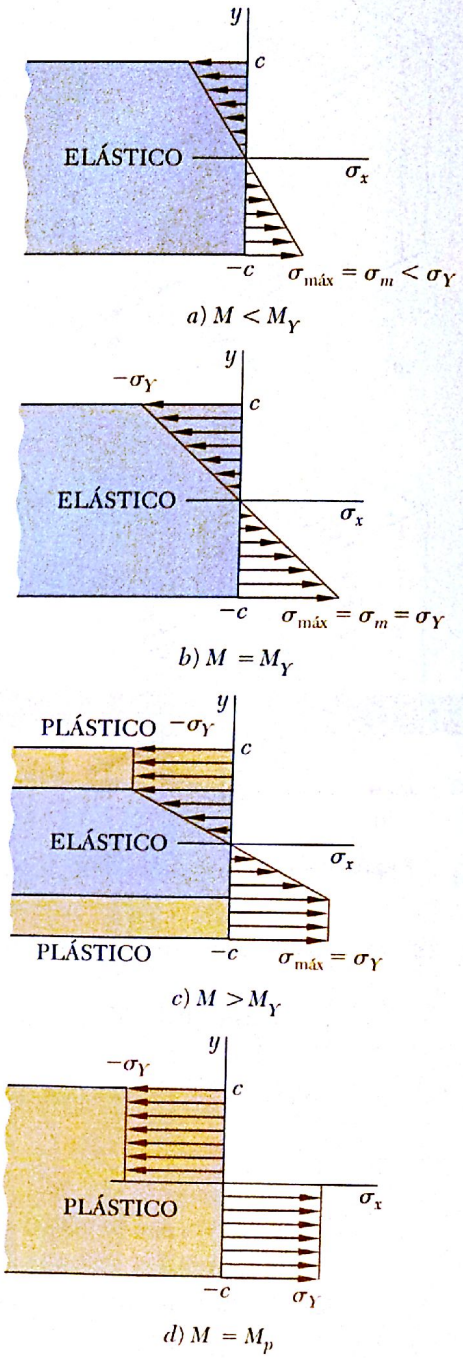


Figura 4.40

† La ecuación (4.42) se aplica a cualquier elemento hecho de cualquier material dúctil con un punto de fluencia bien definido, ya que su deducción no depende de la forma de la sección transversal ni de la forma del diagrama esfuerzo-deformación más allá del punto de cedencia.

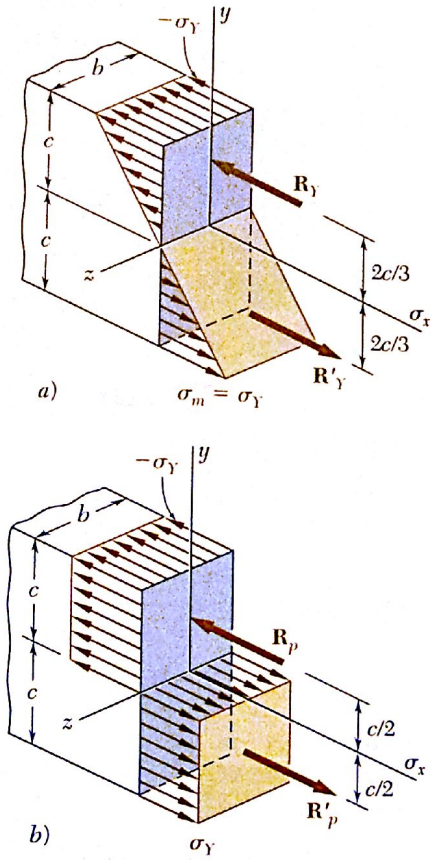


Figura 4.41

Se observa, de la ecuación (4.43), que el momento flector alcanza el valor $M_p = \frac{3}{2}M_Y$ sólo cuando $\rho = 0$. Como claramente no puede tenerse un valor nulo del radio de curvatura en todos los puntos de la superficie neutra, se concluye que una deformación totalmente plástica no puede desarrollarse en flexión pura. Sin embargo, como se verá en el capítulo 5, tal situación puede ocurrir en un punto en el caso de una viga sometida a carga transversal.

En la figura 4.41 se han representado, en tres dimensiones, las distribuciones de esfuerzos en un elemento rectangular, correspondientes, respectivamente, a un momento elástico máximo M_Y y al caso límite del momento plástico M_p. Como, en ambos casos, las resultantes de las fuerzas elementales de tensión y compresión deben pasar por los centroides de los volúmenes que representan la distribución de esfuerzos y ser iguales en magnitud a estos volúmenes, se verifica que:

$$R_Y = \tfrac{1}{2}bc\sigma_Y$$

y

$$R_p = bc\sigma_Y$$

y que los momentos de los pares correspondientes son, respectivamente

$$M_Y = (\tfrac{4}{3}c)R_Y = \tfrac{2}{3}bc^2\sigma_Y \tag{4.44}$$

y

$$M_p = cR_p = bc^2\sigma_Y \tag{4.45}$$

Así, se demuestra que para un elemento rectangular, $M_p = \frac{3}{2}M_Y$ como requería la ecuación (4.39).

Para vigas de *sección transversal no rectangular*, el cálculo del máximo momento elástico M_Y y del momento plástico M_p se simplifica de manera sustancial si se usa un método gráfico de análisis, como se muestra en el problema modelo 4.5. Se encontrará, en este caso más general, que la relación $k = M_p/M_Y$ no es igual a $\frac{3}{2}$. Para formas estructuradas, como las vigas de aleta ancha, por ejemplo, esta relación varía de 1.08 a 1.14. La relación $k = M_p/M_Y$ es *el factor de forma* de la sección transversal ya que depende únicamente de dicha forma. Se observa que si se conocen el factor de forma k y el momento elástico máximo M_Y de una viga es posible obtener el momento plástico M_p de la viga multiplicando a M_Y por k:

$$M_p = kM_Y \tag{4.46}$$

La relación M_p/σ_Y, que se obtiene al dividir el momento plástico M_p del elemento entre la resistencia a la fluencia σ_Y del material se conoce como *módulo plástico de la sección* y se representa por Z. Cuando se conocen el módulo plástico Z y el límite de fluencia σ_Y de una viga, el momento plástico M_p de la viga se obtiene multiplicando σ_Y por Z:

$$M_p = Z\sigma_Y \tag{4.47}$$

Recordando que $M_Y = S\sigma_Y$, ecuación (4.18), y comparando esta relación con la ecuación (4.47) se nota que el factor de forma $k = M_p/M_Y$ de una sección

transversal dada puede expresarse como la relación entre los módulos plástico y elástico:

$$k = \frac{M_p}{M_Y} = \frac{Z\sigma_Y}{S\sigma_Y} = \frac{Z}{S} \tag{4.48}$$

Analizando el caso particular de una viga rectangular de ancho b y altura h, se nota, de las ecuaciones (4.45) y (4.47), que el *módulo plástico* es:

$$Z = \frac{M_p}{\sigma_Y} = \frac{bc^2\sigma_Y}{\sigma_Y} = bc^2 = \tfrac{1}{4}bh^2$$

Por otra parte, recuerde, de la ecuación (4.19) de la sección 4.4, que la *sección de módulo elástico* de la misma viga es

$$S = \tfrac{1}{6}bh^2$$

Sustituyendo en la ecuación (4.48) los valores obtenidos de Z y S, se verifica que el factor de forma de una viga rectangular es

$$k = \frac{Z}{S} = \frac{\frac{1}{4}bh^2}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{3}{2}$$

EJEMPLO 4.05

Un elemento de sección uniforme rectangular de 50 × 120 mm (figura 4.42) se somete a un momento flector $M = 36.8$ kN · m. Suponiendo que el elemento está hecho de un material elastoplástico con un punto de fluencia 240 MPa y un módulo de elasticidad de 200 GPa, determine *a*) el espesor del núcleo elástico, *b*) el radio de curvatura de la superficie neutra.

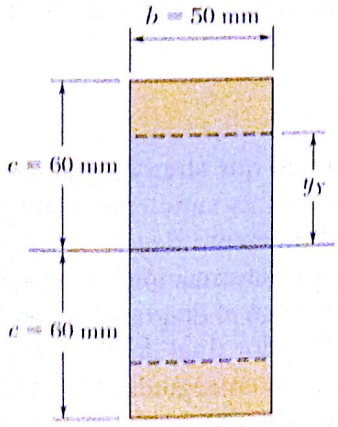


Figura 4.42

a) Espesor del núcleo elástico. Primero se determina el momento elástico máximo M_Y. Sustituyendo en la ecuación (4.34), se tiene

$$\frac{I}{c} = \frac{2}{3}bc^2 = \frac{2}{3}(50 \times 10^{-3}\text{ m})(60 \times 10^{-3}\text{ m})^2$$
$$= 120 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

y llevando este valor, junto con $\sigma_Y = 240$ MPa a la ecuación (4.33)

$$M_Y = \frac{I}{c}\sigma_Y = (120 \times 10^{-6}\text{ m}^3)(240\text{ MPa}) = 28.8\text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sustituyendo los valores de M y M_Y en la ecuación (4.38):

$$36.8\text{ kN} \cdot \text{m} = \frac{3}{2}(28.8\text{ kN} \cdot \text{m})\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right)$$

$$\left(\frac{y_Y}{c}\right)^2 = 0.444 \qquad \frac{y_Y}{c} = 0.666$$

y como $c = 60$ mm

$$y_Y = 0.666(60\text{ mm}) = 40\text{ mm}$$

El espesor $2y_Y$ del núcleo elástico será de 80 mm.

b) Radio de curvatura. Note que la deformación de fluencia es

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{240 \times 10^6\text{ Pa}}{200 \times 10^9\text{ Pa}} = 1.2 \times 10^{-3}$$

Resolviendo la ecuación (4.40) para ρ y reemplazando los valores obtenidos de y_Y y ϵ_Y, se escribe

$$\rho = \frac{y_Y}{\epsilon_Y} = \frac{40 \times 10^{-3}\text{ m}}{1.2 \times 10^{-3}} = 33.3\text{ m}$$

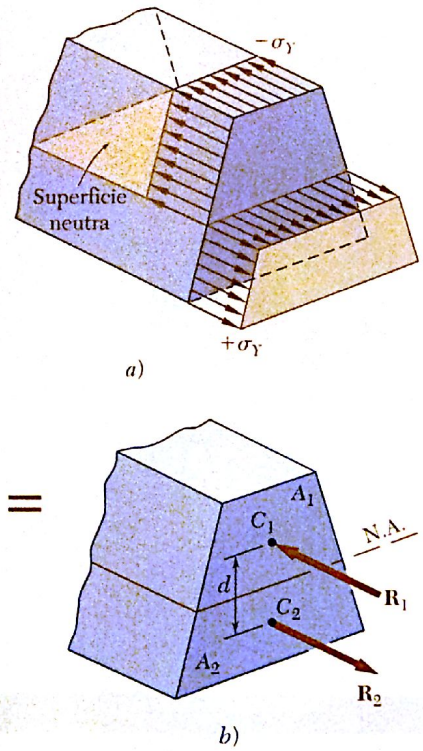


Figura 4.43

*4.10 DEFORMACIONES PLÁSTICAS EN ELEMENTOS CON UN SOLO PLANO DE SIMETRÍA

En el análisis de las deformaciones plásticas, se ha supuesto hasta aquí que el elemento flexionado tiene dos planos de simetría, uno que contiene los pares **M** y **M′**, y el otro que es perpendicular a ese plano. Ahora se estudiará el caso más general en que el elemento sólo posee un plano de simetría que contiene a **M** y **M′**. Sin embargo, el análisis se limitará al caso donde la deformación es totalmente plástica, cuyos esfuerzos normales son uniformemente iguales a $-\sigma_Y$ sobre la superficie neutra y a $+\sigma_Y$ por debajo de ella (figura 4.43*a*).

Como se indicó en la sección 4.8, no puede suponerse que el eje neutro coincide con el eje centroidal de la sección transversal cuando dicha sección no es simétrica con respecto a ese eje. Para localizar el eje neutro, se estudiará la resultante $\mathbf{R}_1$ de las fuerzas elementales de compresión ejercidas sobre la porción A_1 de la sección transversal situada sobre el eje neutro y la resultante $\mathbf{R}_2$ de las fuerzas de tensión ejercidas sobre A_2 debajo del eje neutro (figura 4.43*b*). Puesto que $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ forman un par equivalente al aplicado al elemento, deben tener la misma magnitud. Se tiene, entonces, $R_1 = R_2$, o $A_1\sigma_Y = A_2\sigma_Y$ de lo cual se concluye que $A_1 = A_2$. En otras palabras, *el eje neutro divide la sección transversal en porciones de áreas iguales*. Note que el eje así obtenido *no* será, en general, un eje centroidal de la sección.

También se observa que las líneas de acción de $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ pasan por los centroides C_1 y C_2 de las dos porciones definidas. Si d es la distancia entre C_1 y C_2 y A el área total de la sección transversal, el momento plástico del elemento se expresa como

$$M_p = (\tfrac{1}{2}A\sigma_Y)\,d$$

En el problema modelo 4.6 se presenta un ejemplo del cálculo del momento plástico de un elemento que tiene sólo un plano de simetría.

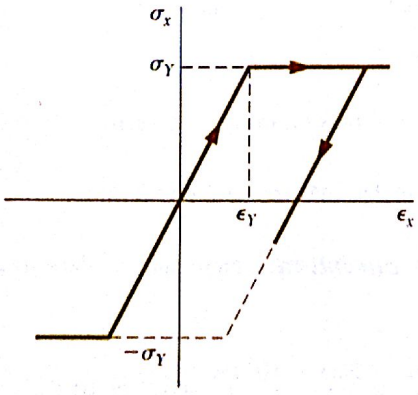


Figura 4.44

*4.11 ESFUERZOS RESIDUALES

En las secciones precedentes se estudió que si en un elemento hecho de material elastoplástico el momento flector es suficientemente grande, se desarrollarán zonas plásticas. Cuando el momento flector se reduce a cero, la correspondiente reducción en esfuerzo y deformación, en cualquier punto dado, puede representarse por una línea recta en el diagrama esfuerzo-deformación, como se ilustra en la figura 4.44. El valor final del esfuerzo en un punto no será cero, en general, tal como se verá en seguida. Habrá un esfuerzo residual en casi todos los puntos, y ese esfuerzo puede tener o no el mismo signo del esfuerzo máximo alcanzado al final de la fase de carga.

Puesto que la relación lineal entre σ_x y ϵ_x se aplica a todos los puntos del elemento durante la fase de descarga, es posible que la ecuación (4.16) pueda usarse para obtener el cambio del esfuerzo en cualquier punto dado. En otras palabras, la fase de descarga puede manejarse suponiendo que el elemento es completamente elástico.

Los esfuerzos residuales se obtienen aplicando el principio de superposición en forma análoga a la descrita en la sección 2.20, para una carga axial, y para la torsión (sección 3.11). Se analizan, por una parte, los esfuerzos de-

bidos a la aplicación del momento flector M y, por otra, los esfuerzos contrarios debidos al momento flector igual y opuesto $-M$ que se aplica para descargar el elemento. El primer grupo de esfuerzos refleja el comportamiento *elastoplástico* del material durante la fase de carga, y el segundo grupo la conducta *lineal* del material durante la fase de descarga. Sumando los grupos de esfuerzos, se obtiene la distribución de esfuerzos residuales en el elemento.

EJEMPLO 4.06

Para el elemento del ejemplo 4.05, halle *a*) la distribución de esfuerzos residuales, *b*) el radio de curvatura después que se ha reducido el momento flector del máximo de 36.8 kN · m a cero.

a) Distribución de los esfuerzos residuales. Recuerde, del ejemplo 4.05, que el límite de fluencia es $\sigma_Y = 240$ MPa y que el espesor del núcleo elástico es $2y_Y = 80$ mm. La distribución de esfuerzos en el elemento cargado es la que se muestra en la figura 4.45*a*.

La distribución de los esfuerzos contrarios debidos al momento flector opuesto de 36.8 kN · m requerido para descargar el elemento es lineal, como se observa en la figura 4.45*b*. El esfuerzo máximo σ'_m en esa distribución se obtiene de la ecuación (4.15). Recordando, del ejemplo 4.05, que $I/c = 120 \times 10^{-6}$ m^3, se tiene

$$\sigma'_m = \frac{Mc}{I} = \frac{36.8 \text{ kN} \cdot \text{m}}{120 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 306.7 \text{ MPa}$$

Superponiendo las dos distribuciones de esfuerzos, se obtienen los esfuerzos residuales ilustrados en la figura 4.45*c*. Se verifica que, aunque los esfuerzos contrarios exceden al límite de fluencia σ_Y, la hipótesis de la distribución lineal de los esfuerzos contrarios es válida, ya que no sobrepasan $2\sigma_Y$.

b) Radio de curvatura después de la descarga. Puede aplicarse la ley de Hooke a cualquier parte del núcleo $|y| < 40$ mm, puesto que no ha ocurrido deformación plástica en esa porción del elemento. Así, la deformación residual a la distancia $y = 40$ mm es

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{-35.5 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = -177.5 \times 10^{-6}$$

Resolviendo la ecuación (4.8) para ρ y sustituyendo los valores apropiados de ϵ_x, y de y, se tiene

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = \frac{40 \times 10^{-3} \text{ m}}{177.5 \times 10^{-6}} = 225 \text{ m}$$

El valor obtenido para ρ, después de remover la carga, representa una deformación permanente del elemento.

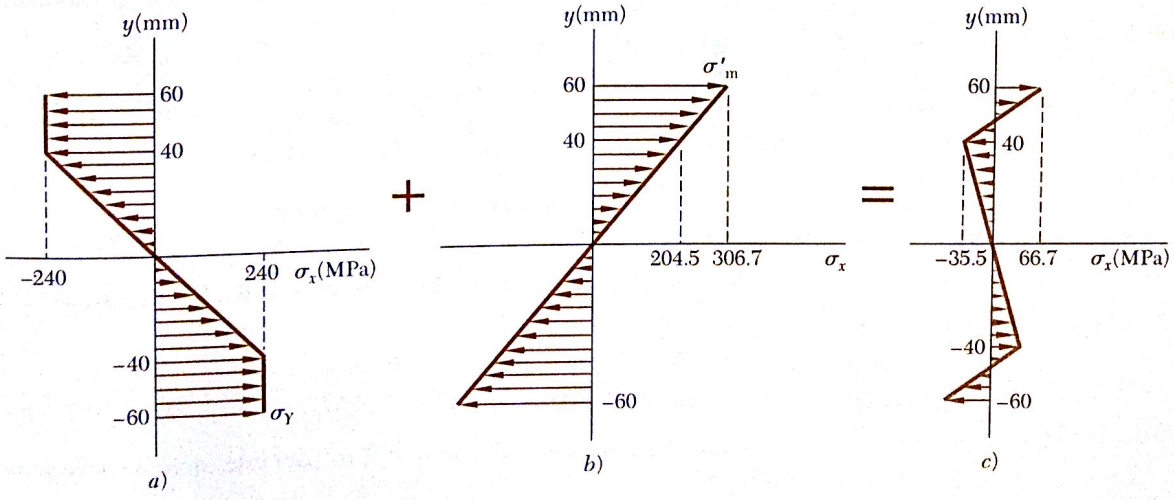
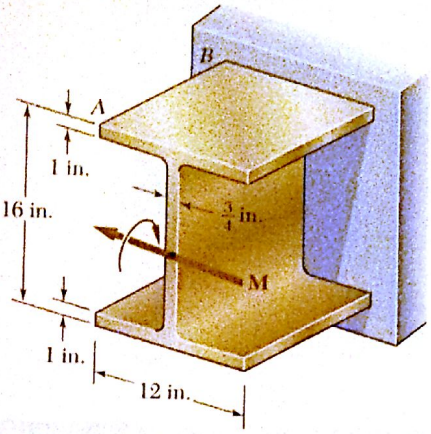


Figura 4.45



PROBLEMA MODELO 4.5

La viga AB está hecha de acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 50$ ksi. Determine, despreciando el efecto de los filetes, el momento flector M y el radio de curvatura correspondiente, *a*) al iniciarse la fluencia, *b*) cuando las aletas se han plastificado completamente.

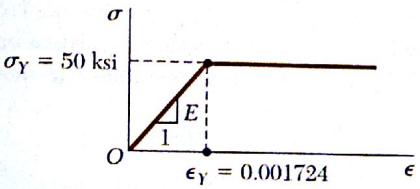
SOLUCIÓN

***a*) Iniciación de la fluencia.** El momento centroidal de inercia de la sección es

$$I = \tfrac{1}{12}(12 \text{ in.})(16 \text{ in.})^3 - \tfrac{1}{12}(12 \text{ in.} - 0.75 \text{ in.})(14 \text{ in.})^3 = 1\,524 \text{ in.}^4$$

Momento flector. Para $\sigma_{máx} = \sigma_Y = 50$ ksi y $c = 8$ in., se tiene

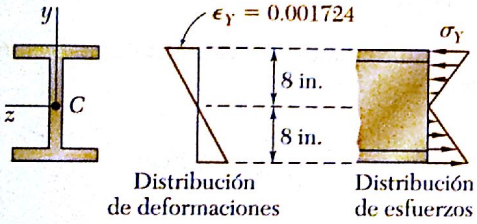
$$M_Y = \frac{\sigma_Y I}{c} = \frac{(50 \text{ ksi})(1\,524 \text{ in.}^4)}{8 \text{ in.}} \qquad M_Y = 9\,525 \text{ kips} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$



Radio de curvatura. Advirtiendo que, en $c = 8$ in., la deformación unitaria es $\epsilon_Y = \sigma_Y/E = (50 \text{ ksi})/(29 \times 10^6 \text{ psi}) = 0.001724$, se tiene de la ecuación (4.41), que

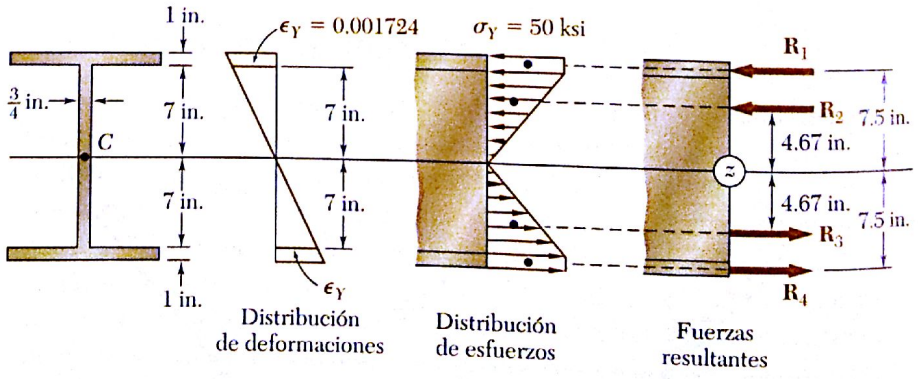
$$c = \epsilon_Y \rho_Y \qquad 8 \text{ in.} = 0.001724 \rho_Y \qquad \rho_Y = 4\,640 \text{ in.} \blacktriangleleft$$

***b*) Patines completamente plásticos.** Cuando los patines se han vuelto completamente plásticos, las deformaciones y los esfuerzos en la sección se muestran en la figura que viene a continuación.



Reemplazamos las fuerzas elementales de compresión ejercidas en el patín superior y en la porción superior del alma por sus resultantes $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$, y de manera similar se reemplazan las fuerzas de tensión por $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_4$.

$$R_1 = R_4 = (50 \text{ ksi})(12 \text{ in.})(1 \text{ in.}) = 600 \text{ kips}$$
$$R_2 = R_3 = \tfrac{1}{2}(50 \text{ ksi})(7 \text{ in.})(0.75 \text{ in.}) = 131.3 \text{ kips}$$

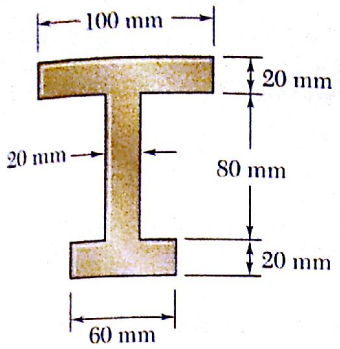


Momento flector. Sumando los momentos de $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_4$ alrededor del eje z, se escribe

$$M = 2[R_1(7.5 \text{ in.}) + R_2(4.67 \text{ in.})]$$
$$= 2[(600)(7.5) + (131.3)(4.67)] \qquad M = 10\,230 \text{ kips} \cdot \text{in.} \blacktriangleleft$$

Radio de curvatura. Ya que $y_Y = 7$ in. para esta carga, se tiene de la ecuación (4.40) que

$$y_Y = \epsilon_Y \rho \qquad 7 \text{ in.} = (0.001724)\rho \qquad \rho = 4\,060 \text{ in.} = 338 \text{ ft.} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA MODELO 4.6

Determine el momento plástico M_p de una viga cuya sección transversal se muestra en la figura, cuando se flexiona alrededor del eje horizontal. Suponga que el material es elastoplástico con un límite de fluencia de 240 MPa.

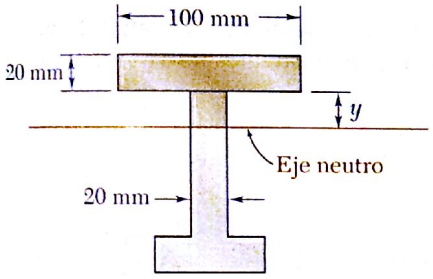
SOLUCIÓN

Eje neutro. Cuando la deformación es totalmente plástica, el eje neutro divide la sección transversal en dos partes cuyas áreas son iguales, puesto que el área total es

$$A = (100)(20) + (80)(20) + (60)(20) = 4\,800 \text{ mm}^2$$

el área sobre el eje neutro será de 2 400 mm^2. Se escribe

$$(20)(100) + 20y = 2\,400 \quad y = 20 \text{ mm}$$



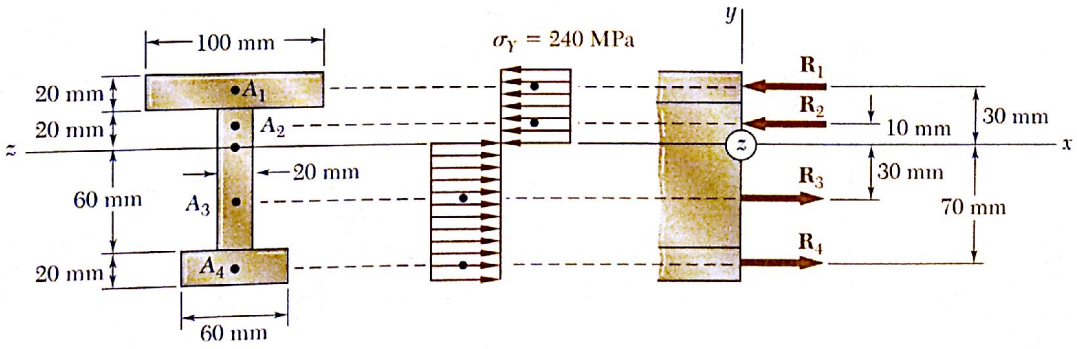
Note que el eje neutro *no* pasa por el centroide de la sección.

Momento plástico. La resultante $\mathbf{R}_i$ de las fuerzas elementales sobre A_i es igual a

$$R_i = A_i\sigma_Y$$

y pasa por el centroide de esa área. Se tiene

$$R_1 = A_1\sigma_Y = [(0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})]240 \text{ MPa} = 480 \text{ kN}$$
$$R_2 = A_2\sigma_Y = [(0.020 \text{ m})(0.020 \text{ m})]240 \text{ MPa} = 96 \text{ kN}$$
$$R_3 = A_3\sigma_Y = [(0.020 \text{ m})(0.060 \text{ m})]240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}$$
$$R_4 = A_4\sigma_Y = [(0.060 \text{ m})(0.020 \text{ m})]240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}$$



El momento plástico M_p se obtiene sumando los momentos de las fuerzas con respecto al eje z.

$$M_p = (0.030 \text{ m})R_1 + (0.010 \text{ m})R_2 + (0.030 \text{ m})R_3 + (0.070 \text{ m})R_4$$
$$= (0.030 \text{ m})(480 \text{ kN}) + (0.010 \text{ m})(96 \text{ kN})$$
$$+ (0.030 \text{ m})(288 \text{ kN}) + (0.070 \text{ m})(288 \text{ kN})$$
$$= 44.16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_p = 44.2 \text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

Nota: Como la sección transversal *no* es simétrica con respecto al eje z, la suma de los momentos de $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ *no* es igual a la suma de los momentos de $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_4$.

PROBLEMA MODELO 4.7

Para la viga del problema modelo 4.5, halle los esfuerzos residuales y el radio permanente de curvatura después de retirar el par **M** de 10 230 kips · in.

SOLUCIÓN

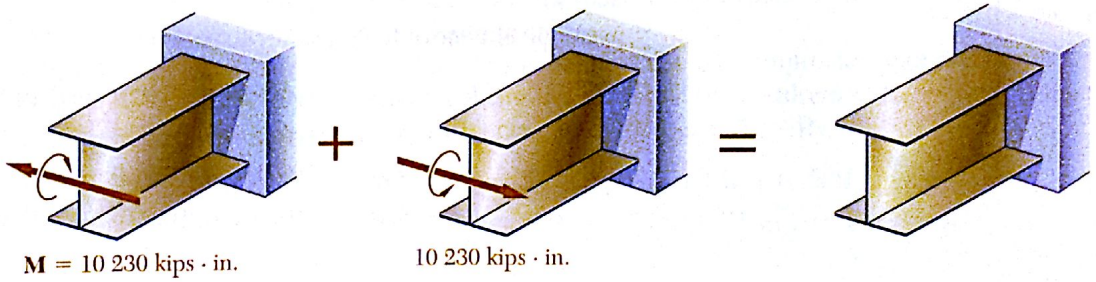
Carga. En el problema modelo 4.5 un par con momento $M = 10\ 230$ kips · in. se aplicó y se obtuvieron los esfuerzos mostrados en la figura 1.

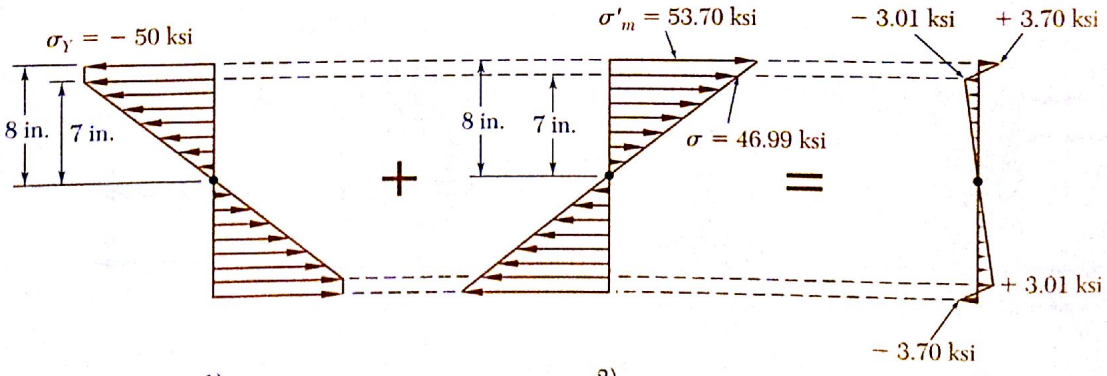
Descarga elástica. La viga se descarga por la aplicación de un par de momento $M = -10\ 230$ kips · in. (que es igual y opuesto al par originalmente aplicado). Durante esta descarga, la acción de la viga es completamente elástica; recordando del problema modelo 4.5 que $I = 1\ 524$ in.^{4}, se calcula el esfuerzo máximo

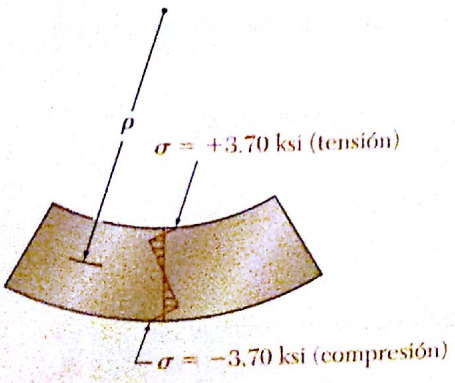
$$\sigma'_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(10\ 230 \text{ kips} \cdot \text{in.})(8 \text{ in.})}{1\ 524 \text{ in.}^4} = 53.70 \text{ ksi}$$

Los esfuerzos causados por la descarga se muestran en la figura 2.

Esfuerzos residuales. Se superponen los esfuerzos debidos a la carga (figura 1) y a la descarga (figura 2) y se obtienen los esfuerzos residuales en la viga (figura 3).







Radio permanente de curvatura. En $y = 7$ in. el esfuerzo residual es $\sigma = -3.01$ ksi. Ya que no ocurrió deformación plástica en este punto, se aplica la ley de Hooke y se tiene que $\epsilon_x = \sigma/E$. Recordando la ecuación (4.8), se tiene que

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = -\frac{yE}{\sigma} = -\frac{(7 \text{ in.})(29 \times 10^6 \text{ psi})}{-3.01 \text{ ksi}} = +67\ 400 \text{ in.} \quad \rho = 5\ 620 \text{ ft} \blacktriangleleft$$

Se advierte que el esfuerzo residual es en tensión sobre la cara superior de la viga y de compresión en la cara inferior, aun cuando la viga es cóncava hacia arriba.

PROBLEMAS

4.67 La barra prismática que se muestra en la figura, hecha de un acero que se supone elastoplástico con $\sigma_Y = 300$ MPa, se somete a un par **M** paralelo al eje x. Determine el momento M del par para el que *a*) ocurre la cedencia, *b*) el núcleo elástico de la barra tiene un grosor de 4 mm.

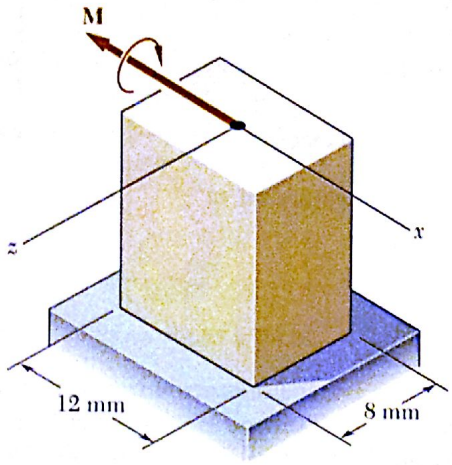


Figura P4.67

4.68 Retome el problema 4.67, y ahora suponga que el par **M** es paralelo al eje z.

4.69 Una barra, con la sección transversal rectangular que se muestra en la figura, está hecha de un acero que se supone elastoplástico con $E = 30 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 48$ ksi. Determine el espesor de las zonas plásticas en las partes superior e inferior de la barra cuando *a*) $M = 250$ lb · in., *b*) $M = 300$ lb · in.

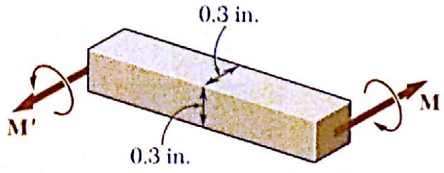


Figura P4.69

4.70 Para la barra de acero del problema 4.69, determine el momento flector M del par para el cual *a*) ocurre la cedencia, *b*) las zonas plásticas en las partes superior e inferior de la barra son de 0.09 in. de espesor.

4.71 La barra prismática que se muestra en la figura, hecha de un acero que se supone elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi, se somete a un par de 1 350 lb · in. paralelo al eje z. Determine *a*) el grosor del núcleo elástico, *b*) el radio de curvatura de la barra.

4.72 Retome el problema 4.71, y ahora suponga que el par de 1 350 lb · in. es paralelo al eje y.

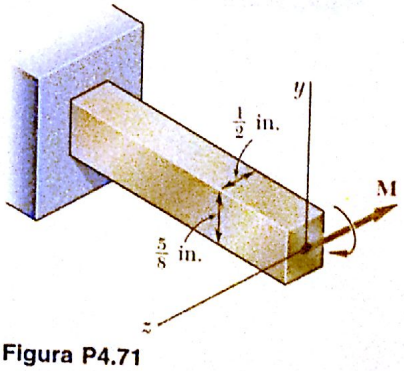


Figura P4.71

4.73 y 4.74 Una barra con la sección transversal que se muestra en la figura está hecha de un acero que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 240$ MPa. Para una flexión alrededor del eje z, encuentre el momento flector en el que *a*) ocurre la cedencia, *b*) las zonas plásticas encima y debajo de la barra tienen un espesor de 30 mm.

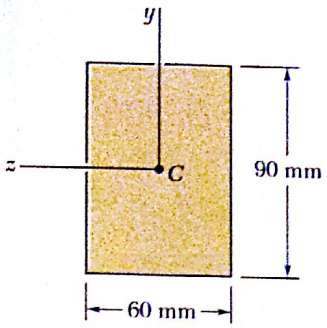


Figura P4.73

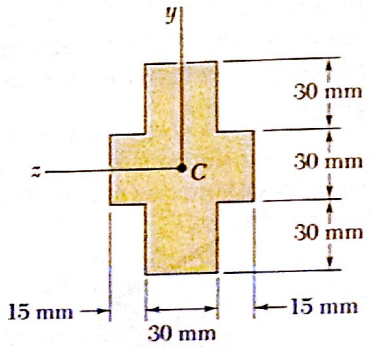


Figura P4.74

4.75 y 4.76 Una viga con la sección transversal que se muestra en la figura está hecha de un acero que se supone elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 42$ ksi. Para una flexión alrededor del eje z, determine el momento flector para el que *a*) ocurre la cedencia, *b*) las zonas plásticas encima y debajo de la barra son de 1 in. de espesor.

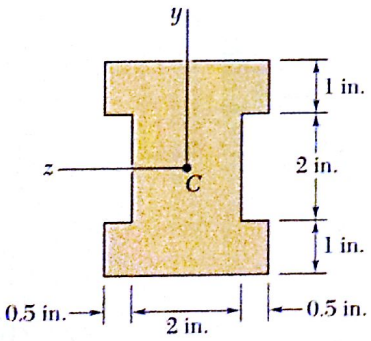


Figura P4.75

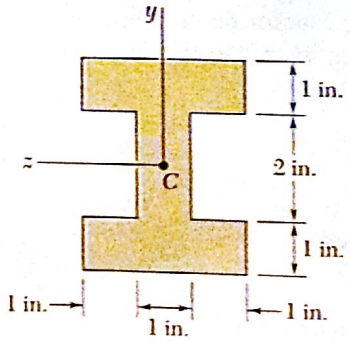


Figura P4.76

4.77 a 4.80 Para la viga indicada determine *a*) el momento completamente plástico M_p, *b*) el factor de forma de la sección transversal.

4.77 Viga del problema 4.73.
4.78 Viga del problema 4.74.
4.79 Viga del problema 4.75.
4.80 Viga del problema 4.76.

4.81 y 4.82 Determine el momento plástico M_p de una viga de acero con la sección transversal que se muestra en la figura, suponga que el acero es elastoplástico con una resistencia a la cedencia de 240 MPa.

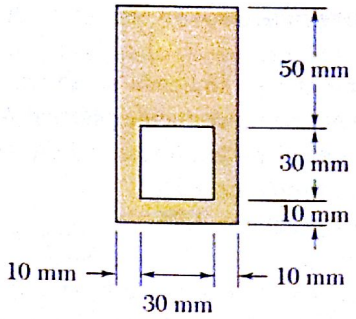


Figura *P4.81*

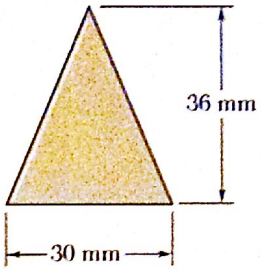


Figura P4.82

4.83 Un tubo de pared gruesa con la sección transversal que se muestra en la figura, está hecho de un acero que se supone elastoplástico con una resistencia a la cedencia σ_Y. Desarrolle una expresión para el momento plástico M_p del tubo en términos de c_1, c_2 y σ_Y.

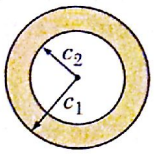


Figura *P4.83* y P4.84

4.84 Determine el momento plástico M_p de un tubo de pared gruesa con la sección transversal que se muestra en la figura, si se sabe que $c_1 = 60$ mm, $c_2 = 40$ mm y $\sigma_Y = 240$ MPa.

4.85 Determine el momento plástico M_p de una viga de acero con la sección transversal que se muestra en la figura, para ello suponga que el acero es elastoplástico y que tiene una resistencia a la cedencia de 48 ksi.

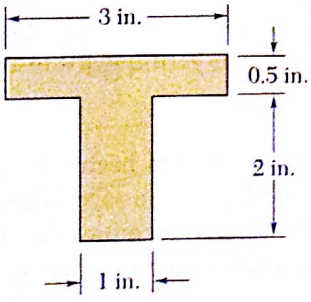


Figura P4.85

4.86 Determine el momento plástico M_p de una viga de acero con la sección transversal que se muestra en la figura, para ello suponga que el acero es elastoplástico y que tiene una resistencia a la cedencia de 36 ksi.

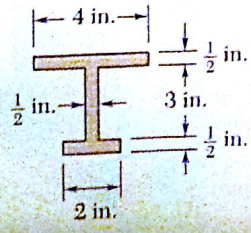


Figura P4.86

4.87 y 4.88 Sobre la viga indicada se aplica y después se retira un par con momento igual al momento completamente plástico M_p. Con una resistencia a la cedencia de 240 MPa, determine el esfuerzo residual en $y = 45$ mm.

4.87 Viga del problema 4.73.

4.88 Viga del problema 4.74.

4.89 y 4.90 Sobre la viga indicada se aplica y después se retira un par con momento igual al momento completamente plástico M_p. Con una resistencia a la cedencia de 42 ksi, determine el esfuerzo residual en *a*) $y = 1$ in., *b*) $y = 2$ in.

4.89 Viga del problema 4.75.

4.90 Viga del problema 4.76.

4.91 Un momento flector se aplica a la viga del problema 4.73, por lo que se desarrollan zonas plásticas de 30 mm de espesor encima y debajo de la barra. Después de que el par se ha retirado, determine *a*) los esfuerzos residuales en $y = 45$ mm, *b*) los puntos donde el esfuerzo residual es cero, *c*) el radio de curvatura correspondiente a la deformación permanente de la viga.

4.92 Un momento flector se aplica a la viga del problema 4.76, por lo que se desarrollan zonas plásticas de 2 in. de espesor encima y debajo de la barra. Después de que el par se ha retirado, determine *a*) los esfuerzos residuales en $y = 2$ in., *b*) los puntos donde el esfuerzo residual es cero, *c*) el radio de curvatura correspondiente a la deformación permanente de la viga.

***4.93** Una barra rectangular recta y sin esforzar es flexionada para formar un arco de círculo con radio ρ mediante dos pares con momento M. Después de que los pares se retiran, se observa que el radio de curvatura de la barra es ρ_R. Denote con ρ_Y el radio de curvatura de la barra al inicio de la cedencia y muestre que los radios de curvatura satisfacen la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\rho_R} = \frac{1}{\rho}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{\rho}{\rho_Y}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\rho}{\rho_Y}\right)^2\right]\right\}$$

4.94 Una barra con sección transversal rectangular es de un material que se supone elastoplástico. Denote con M_Y y con ρ_Y, respectivamente, el momento flector y el radio de curvatura al inicio de la cedencia, determine *a*) el radio de curvatura cuando un par con momento $M = 1.25\,M_Y$ se aplica a la barra, *b*) el radio de curvatura después de que se retira el par. Verifique los resultados con la relación deducida en el problema 4.93.

4.95 La barra prismática AB está hecha de un acero que se supone elastoplástico y para el que $E = 200$ GPa. Si se sabe que el radio de curvatura de la barra es de 2.4 m cuando se aplica un par con momento $M = 350$ N · m, como se indica en la figura, determine *a*) la resistencia a la cedencia del acero, *b*) el espesor del núcleo elástico de la barra.

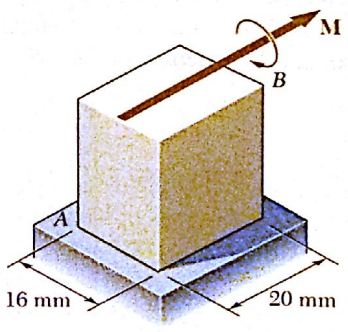


Figura P4.95

4.96 La barra prismática AB es de una aleación de aluminio para la que el diagrama de esfuerzo-deformación unitaria a tensión es como se muestra en la figura. Suponga que el diagrama σ-ϵ es el mismo a compresión que a tensión, determine *a*) el radio de curvatura de la barra cuando el esfuerzo máximo es de 250 MPa, *b*) el valor correspondiente del momento flector. (*Sugerencia*: Para el inciso *b*), grafique σ frente a y y utilice un método aproximado de integración.)

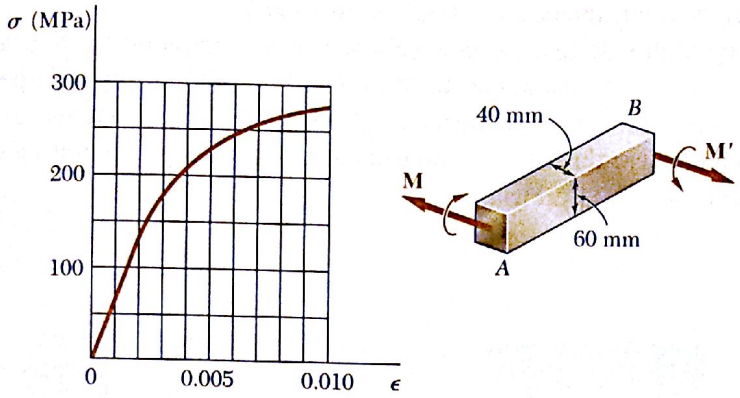


Figura *P4.96*

4.97 La barra prismática AB está hecha de una aleación de bronce con un diagrama de esfuerzo-deformación a tensión como se muestra en la figura. Suponga que el diagrama σ-ϵ es el mismo a compresión que a tensión, determine *a*) el esfuerzo máximo en la barra cuando el radio de curvatura de la barra es de 100 in., *b*) el valor correspondiente del momento flector. (Vea la sugerencia dada en el problema 4.96.)

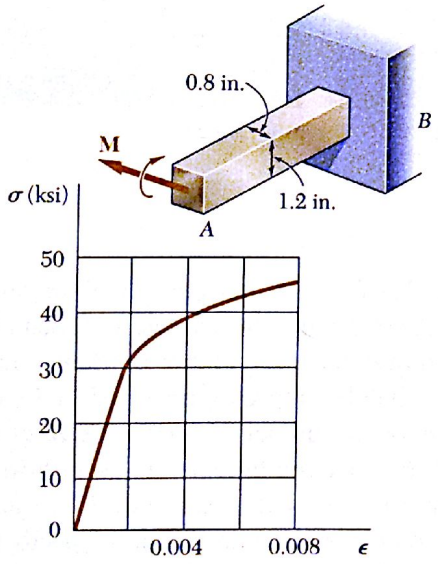


Figura P4.97

4.98 Una barra prismática de sección rectangular es de una aleación para la cual el diagrama esfuerzo-deformación se representa mediante la relación $\epsilon = k\sigma^n$ para $\sigma > 0$ y $\epsilon = -|k\sigma^n|$ para $\sigma < 0$. Si se aplica un par $\mathbf{M}$ a la barra, demuestre que el esfuerzo máximo es

$$\sigma_m = \frac{1 + 2n}{3n}\frac{Mc}{I}$$

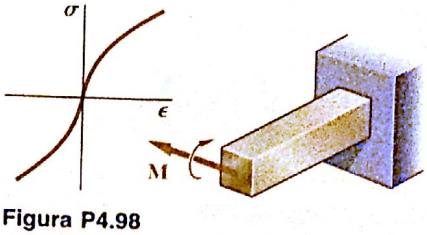


Figura P4.98

4.12 CARGA AXIAL EXCÉNTRICA EN UN PLANO DE SIMETRÍA

En la sección 1.5 se estudió que la distribución de esfuerzos en la sección transversal de un elemento sometido a carga axial puede considerarse uniforme sólo si la línea de acción de las cargas **P** y **P′** pasan por el centroide de la sección. Se dice que dicha carga es *céntrica*. Ahora se estudiará la distribución de esfuerzos cuando la línea de acción de las fuerzas *no* pasa por el centroide, es decir, cuando la carga es *excéntrica*.

Dos ejemplos de una carga excéntrica se presentan en las figuras 4.46 y 4.47. En el caso del arbotante de iluminación de la autopista, el peso de la lámpara causa una carga excéntrica en el poste. De la misma manera, las fuerzas verticales ejercidas sobre la prensa causan una carga excéntrica en la columna posterior de la prensa.

Figura 4.46

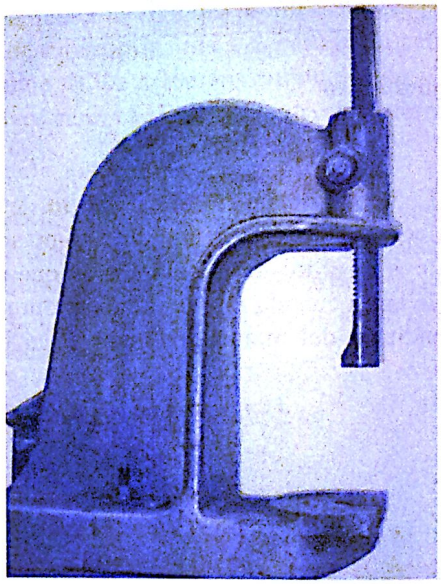


Figura 4.47

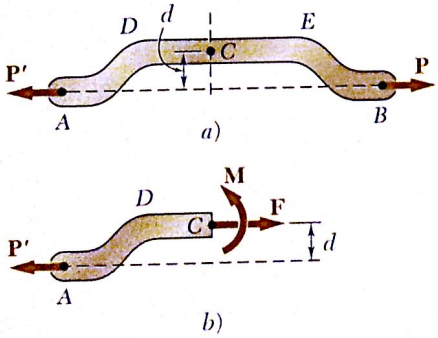


Figura 4.48

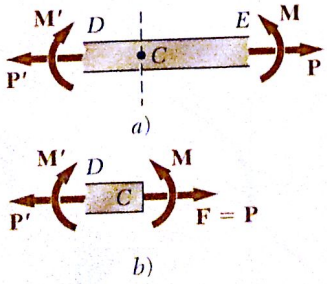


Figura 4.49

En esta sección, el análisis se restringirá a elementos que tienen un plano de simetría, y se supondrá que las cargas se aplican en el plano de simetría del elemento (figura 4.48*a*). Las fuerzas internas que actúan en una sección transversal dada pueden representarse por la fuerza **F** aplicada en el centroide *C* de la sección y a un par **M** que actúa en el plano de simetría del elemento (figura 4.48*b*). Las condiciones de equilibrio del cuerpo libre *AC* requieren que la fuerza **F** sea igual y opuesta a **P′** y que el momento del par **M** sea igual y opuesto al momento de **P′** con respecto a *C*. Llamando *d* a la distancia desde *C* hasta la línea de acción *AB* de las fuerzas **P** y **P′**, se tiene

$$F = P \qquad \text{y} \qquad M = Pd \tag{4.49}$$

Se observa que las fuerzas internas en la sección se hubieran representado por la misma fuerza y el mismo par si la porción recta *DE* del elemento *AB* se hubiera separado de *AB* y sometido simultáneamente a las fuerzas céntricas **P** y **P′** y a los pares de flexión **M** y **M′** (figura 4.49). Así, la distribución de esfuerzos debida a la carga excéntrica original puede obtenerse

superponiendo la distribución uniforme del esfuerzo correspondiente a las cargas céntricas **P** y **P′** y la distribución lineal correspondiente a los pares flectores **M** y **M′** (figura 4.50).

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{\text{céntrica}} + (\sigma_x)_{\text{flexión}}$$

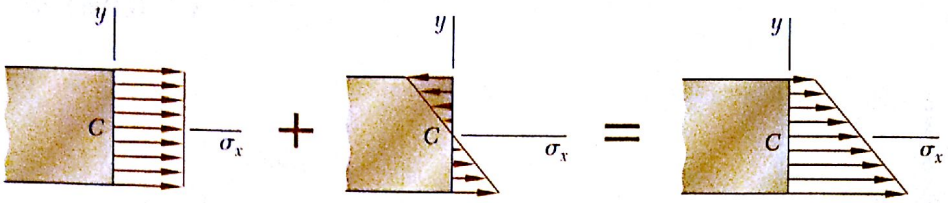


Figura 4.50

o, recordando las ecuaciones (1.5) y (4.16):

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \tag{4.50}$$

donde A es el área de la sección transversal e I su momento centroidal de inercia, y donde y se mide desde el eje centroidal de la sección. La relación obtenida muestra que la distribución de esfuerzos en la sección es *lineal pero no uniforme*. Dependiendo de la geometría de la sección transversal y de la excentricidad de la carga, los esfuerzos combinados pueden tener todos el mismo signo, como en la figura 4.50, o algunos pueden ser positivos y otros negativos, como en la figura 4.51. En el último caso habrá una línea en la sección, a lo largo de la cual $\sigma_x = 0$. Esta línea representa el *eje neutro* de la sección. Se observa que el eje neutro *no* coincide con el eje centroidal de sección, ya que $\sigma_x \neq 0$ para $y = 0$.

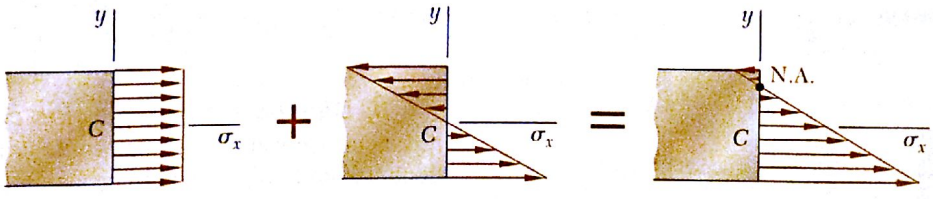


Figura 4.51

Los resultados obtenidos serán válidos sólo hasta el punto que se satisfagan las condiciones de aplicación del principio de superposición (sección 2.12) y del principio de Saint-Venant (véase sección 2.17). Esto implica que los esfuerzos no deben exceder el límite de proporcionalidad del material, que las deformaciones por la flexión tampoco deben afectar apreciablemente la distancia d en la figura 4.48*a* y que la sección transversal donde se calculan los esfuerzos no esté muy próxima a los puntos D o E de la misma figura. El primero de estos requisitos muestra claramente que el método de superposición no puede aplicarse a deformaciones plásticas.

EJEMPLO 4.07

Una cadena de eslabón abierto se obtiene doblando barras de acero de bajo carbono, de 0.5 in. de diámetro, hasta darles la forma que se aprecia en la figura 4.52. Si la cadena soporta una fuerza de 160 lb, determine *a*) los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la parte recta del eslabón, *b*) la distancia entre los ejes centroidal y neutro de una sección transversal.

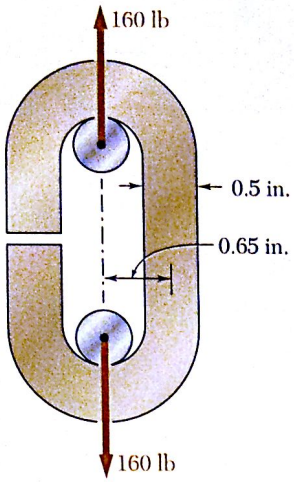


Figura 4.52

a) Máximos esfuerzos de tensión y compresión. Las fuerzas internas en la sección transversal son equivalentes a una fuerza céntrica **P** y a un momento flector **M** (figura 4.53) de magnitudes

$$P = 160 \text{ lb}$$
$$M = Pd = (160 \text{ lb})(0.65 \text{ in.}) = 104 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

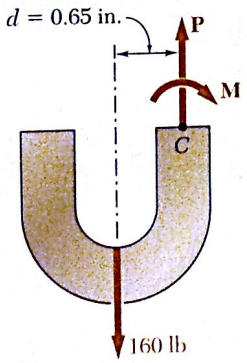


Figura 4.53

Las distribuciones de esfuerzos correspondientes se indican en las partes *a*) y *b*) de la figura 4.54. La distribución debida a la fuerza céntrica **P** es uniforme e igual a $\sigma_0 = P/A$. Se tiene

$$A = \pi c^2 = \pi(0.25 \text{ in.})^2 = 0.1963 \text{ in.}^2$$
$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{160 \text{ lb}}{0.1963 \text{ in.}^2} = 815 \text{ psi}$$

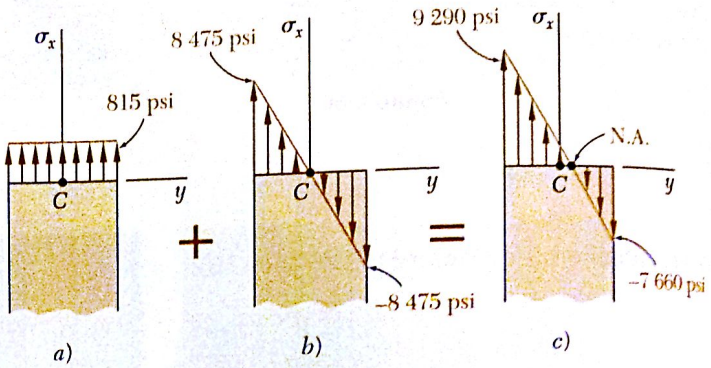


Figura 4.54

Debido al par de flexión **M**, la distribución es lineal y posee un esfuerzo máximo $\sigma_m = Mc/I$.

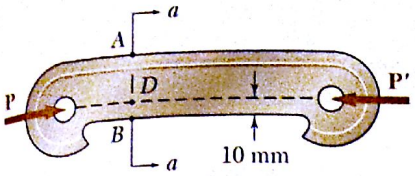
$$I = \tfrac{1}{4}\pi c^4 = \tfrac{1}{4}\pi(0.25 \text{ in.})^4 = 3.068 \times 10^{-3} \text{ in.}^4$$
$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(104 \text{ lb} \cdot \text{in.})(0.25 \text{ in.})}{3.068 \times 10^{-3} \text{ in.}^4} = 8\,475 \text{ psi}$$

Superponiendo las dos distribuciones se obtiene la distribución de esfuerzos correspondientes a la carga excéntrica (figura 4.54*c*). Los esfuerzos máximos de tensión y compresión de la sección son, respectivamente

$$\sigma_t = \sigma_0 + \sigma_m = 815 + 8\,475 = 9\,290 \text{ psi}$$
$$\sigma_c = \sigma_0 - \sigma_m = 815 - 8\,475 = -7\,660 \text{ psi}$$

b) Distancia entre los ejes centroidal y neutro. La distancia y_0 entre los ejes centroidal y neutro de la sección se obtiene haciendo $\sigma_x = 0$ en la ecuación (4.50); resolviendo para y_0,

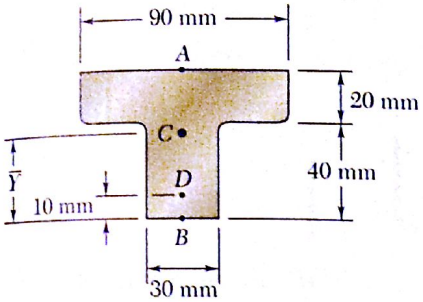
$$0 = \frac{P}{A} - \frac{My_0}{I}$$
$$y_0 = \left(\frac{P}{A}\right)\left(\frac{I}{M}\right) = (815 \text{ psi})\frac{3.068 \times 10^{-3} \text{ in.}^4}{104 \text{ lb} \cdot \text{in.}}$$
$$y_0 = 0.0240 \text{ in.}$$



PROBLEMA MODELO 4.8

Sabiendo que para el conector de hierro colado, que se ilustra en la figura, los esfuerzos permisibles son 30 MPa a tensión y 120 MPa a compresión, halle la máxima fuerza **P** que puede aplicarse al conector. (*Nota*: En el problema modelo 4.2 ya se había estudiado la sección en T del conector.)

SOLUCIÓN

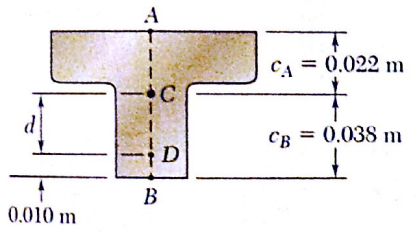


Sección *a-a*

Propiedades de la sección transversal. Del problema modelo 4.2, se tiene

$$A = 3\,000 \text{ mm}^2 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \qquad \bar{Y} = 38 \text{ mm} = 0.038 \text{ m}$$
$$I = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Ahora se escribe: $d = (0.038 \text{ m}) - (0.010 \text{ m}) = 0.028 \text{ m}$



Fuerza y par en *C*. Se reemplaza **P** por un sistema equivalente fuerza-par en el centroide *C*.

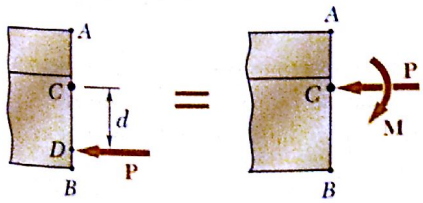
$$P = P \qquad M = P(d) = P(0.028 \text{ m}) = 0.028\,P$$

La fuerza **P** que actúa en el centroide causa una distribución de esfuerzo uniforme (figura 1). El par de flexión **M** produce una distribución de esfuerzo lineal (figura 2).

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{P}{3 \times 10^{-3}} = 333P \qquad \text{(Compresión)}$$

$$\sigma_1 = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(0.028P)(0.022)}{868 \times 10^{-9}} = 710P \qquad \text{(Tensión)}$$

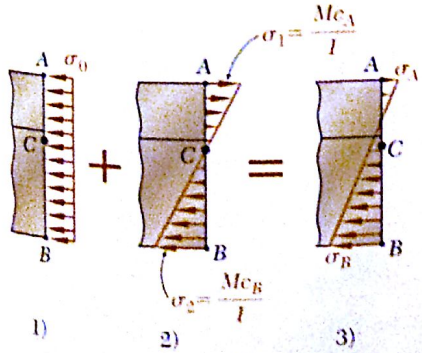
$$\sigma_2 = \frac{Mc_B}{I} = \frac{(0.028P)(0.038)}{868 \times 10^{-9}} = 1\,226P \qquad \text{(Compresión)}$$



Superposición. La distribución total de esfuerzos (figura 3) se encuentra superponiendo las distribuciones de esfuerzos causadas por la fuerza céntrica **P** y por el par **M**. Como la tensión es positiva y la compresión negativa, se tiene:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_A}{I} = -333P + 710P = +377P \qquad \text{(Tensión)}$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{Mc_B}{I} = -333P - 1\,226P = -1\,559P \qquad \text{(Compresión)}$$



Fuerza máxima permisible. La magnitud de **P**, para la cual el esfuerzo de tensión en el punto *A* es igual al esfuerzo permisible de tensión de 30 MPa, se encuentra escribiendo:

$$\sigma_A = 377P = 30 \text{ MPa} \qquad P = 79.6 \text{ kN} \triangleleft$$

También se determina la magnitud de **P** para la cual el esfuerzo en *B* es igual al esfuerzo de compresión de 120 MPa.

$$\sigma_B = -1\,559P = -120 \text{ MPa} \qquad P = 77.0 \text{ kN} \triangleleft$$

La magnitud de la máxima fuerza que puede aplicarse en **P**, sin exceder alguno de los esfuerzos permisibles, es el menor de los dos valores encontrados.

$$P = 77.0 \text{ kN} \blacktriangleleft$$

4.99 Determine el esfuerzo en los puntos A y B, *a*) para la carga que se muestra en la figura, *b*) si las cargas de 15 kip se aplican únicamente en los puntos 1 y 2.

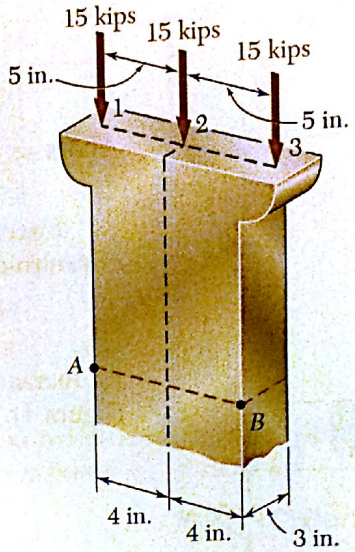


Figura P4.99 y P4.100

4.100 Determine el esfuerzo en los puntos A y B, *a*) para la carga que se muestra en la figura, *b*) si las cargas de 15 kip que se aplican en los puntos 2 y 3 son retiradas.

4.101 Dos fuerzas **P** pueden aplicarse por separado o al mismo tiempo sobre una placa que está soldada a una barra circular de radio r. Determine el esfuerzo de compresión máximo en la barra circular, *a*) cuando se aplican ambas fuerzas, *b*) cuando sólo se aplica una de las fuerzas.

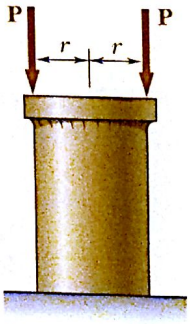


Figura P4.101

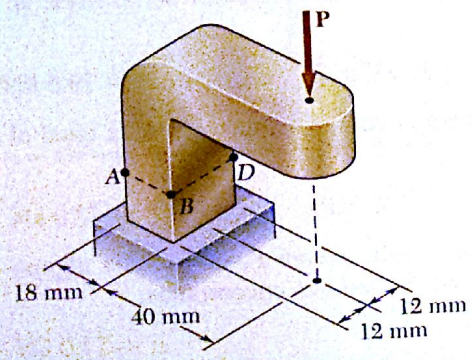


Figura *P4.102*

4.102 Si se sabe que la magnitud de la fuerza vertical **P** es de 2 kN, determine el esfuerzo en *a*) el punto A, *b*) el punto B.

4.103 La porción vertical de la prensa que se muestra en la figura consta de un tubo rectangular con un espesor de pared $t = 10$ mm. Si se sabe que la prensa se ha apretado sobre unas planchas de madera que se pegaron hasta que $P = 20$ kN, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

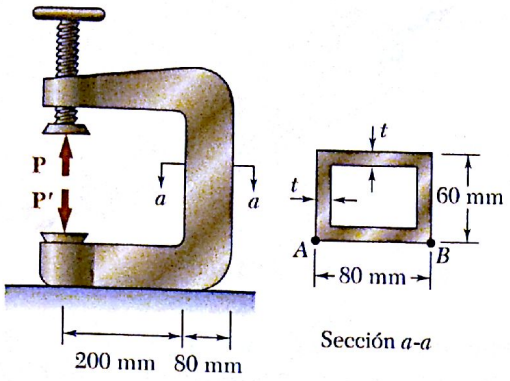


Figura P4.103

4.104 Retome el problema 4.103, y ahora suponga que $t = 8$ mm.

4.105 Las porciones de una barra cuadrada de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ in. se han doblado hasta formar los dos componentes de máquina que se muestran en la figura. Si se sabe que el esfuerzo permisible es de 15 ksi, determine la carga máxima que puede aplicarse a cada componente.

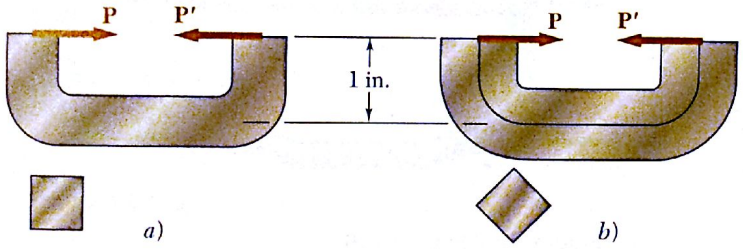


Figura P4.105

4.106 Las cuatro fuerzas que se muestran en la figura se aplican a una placa rígida que soporta un poste de acero con radio *a*. Si se sabe que $P = 100$ kN y $a = 40$ mm, determine el esfuerzo máximo en el poste cuando *a*) se retira la fuerza en *D*, *b*) se retiran las fuerzas en *C* y en *D*.

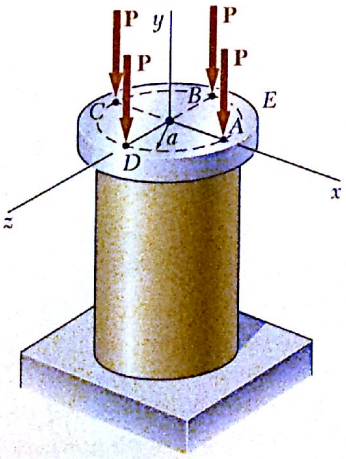


Figura P4.106

4.107 Mediante fresado se removió una porción de una barra sólida de sección cuadrada. Si se sabe que $a = 30$ mm, $d = 20$ mm y $\sigma_{perm} = 60$ MPa, determine la magnitud P de la fuerza mayor que puede aplicarse con seguridad en los centros de los extremos de la barra.

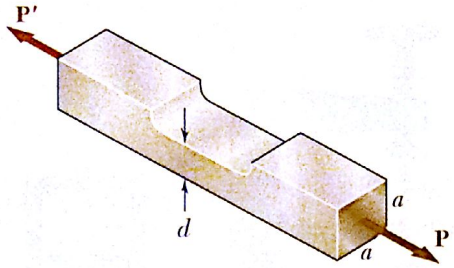


Figura P4.107 y P4.108

4.108 Mediante fresado se removió una porción de una barra sólida de sección cuadrada. Se aplicaron fuerzas de magnitud $P = 18$ kN en los centros de los extremos de la barra. Si se sabe que $a = 30$ mm y $\sigma_{perm} = 135$ MPa, determine la profundidad d mínima permisible de la porción fresada de la barra.

4.109 Es necesario realizar un doblez h en una varilla circular sólida con diámetro d. Si se sabe que el esfuerzo máximo después de que se produce el doblez no debe exceder 5 veces el esfuerzo en la varilla cuando estaba recta, determine el máximo doblez a realizar.

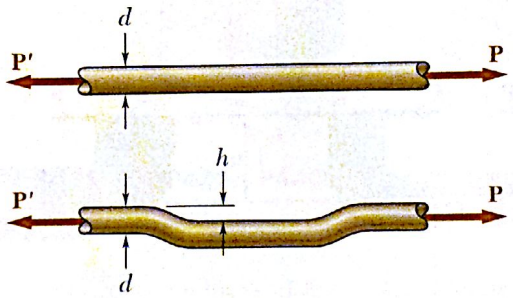


Figura *P4.109* y P4.110

4.110 Es necesario realizar un doblez h en un tubo de metal de 0.75 in. de diámetro exterior y 0.08 in. de grosor de pared. Si se sabe que el esfuerzo máximo después de que se produce el doblez no debe exceder 4 veces el esfuerzo en la varilla cuando estaba recta, determine el máximo doblez a realizar.

4.111 Si se sabe que el esfuerzo permisible en la sección ABD es de 10 ksi, determine la máxima fuerza **P** que puede aplicarse a la ménsula mostrada en la figura.

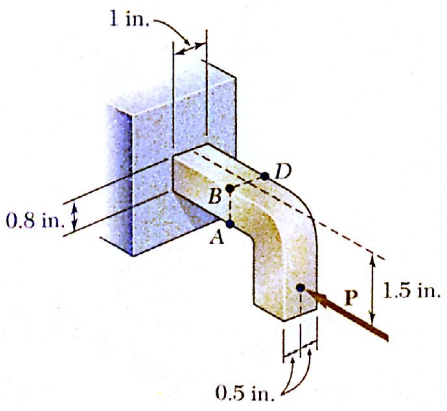


Figura *P4.111*

4.112 Una columna corta se fabrica clavando dos tablas de 1 × 4 in. a un madero de 4 × 4 in. Determine el esfuerzo máximo de compresión causado en la columna por una carga de 16 kip aplicada en el centro de la sección superior del madero como se muestra en la figura, si *a*) la columna es como se ha descrito, *b*) se retira la tabla 1, *c*) se retiran ambas tablas, *d*) se retiran las tablas 1, 2 y 3, *e*) se retiran todas las tablas.

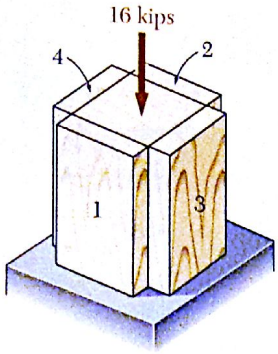


Figura *P4.112*

4.113 Si se sabe que la prensa mostrada se apretó sobre unas tablas de madera pegadas hasta que $P = 400$ N, determine en la sección *a-a*, *a*) el esfuerzo en el punto *A*, *b*) el esfuerzo en el punto *D*, *c*) la localización del eje neutro.

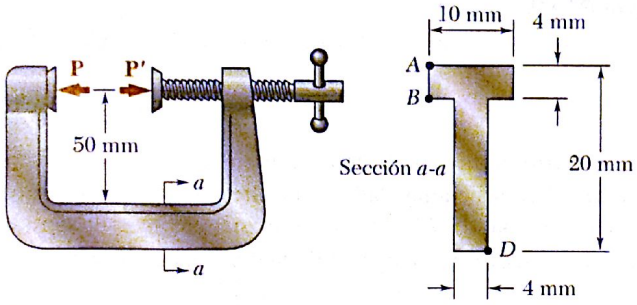


Figura P4.113

4.114 Tres placas de acero, cada una con sección transversal de 25 × 150 mm, se sueldan para formar una columna corta H. Luego, por razones arquitectónicas, se retira una tira de 25 mm de cada lado de una de las aletas. Si se sabe que la carga permanece céntrica respecto a la sección transversal original y que el esfuerzo permisible es de 100 MPa, determine la máxima fuerza **P**, que puede aplicarse a *a*) la columna original, *b*) la columna modificada.

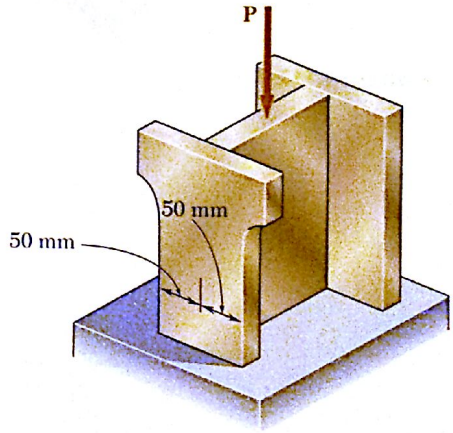


Figura P4.114

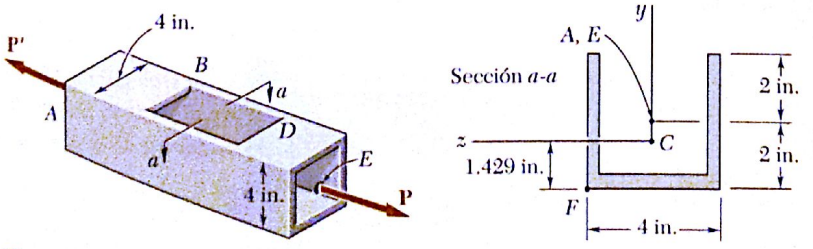
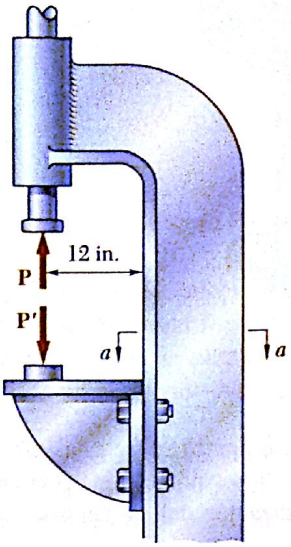
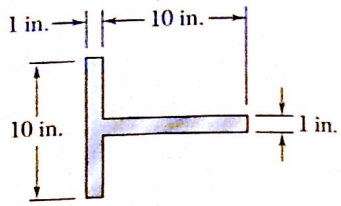


Figura *P4.115*

4.115 Con la intención de proporcionar acceso al interior de un tubo cuadrado hueco con un grosor de pared de 0.25 in., se ha removido la porción *CD* de un lado del tubo. Si se sabe que la carga del tubo es equivalente a las dos fuerzas iguales y opuestas de 15 kip que actúan en los centros geométricos *A* y *E* de los extremos del tubo, determine *a*) el esfuerzo máximo en la sección *a-a*, *b*) el esfuerzo en el punto *F*. *Dato*: el centroide de la sección transversal está en *C* e $I_z = 4.81$ in.^{4}

4.116 Si se sabe que el esfuerzo permisible en la sección *a-a* de la prensa hidráulica mostrada en la figura es de 6 ksi en tensión y 12 ksi en compresión, determine la máxima fuerza **P** que puede ejercer la prensa.





Sección *a-a*

Figura P4.116

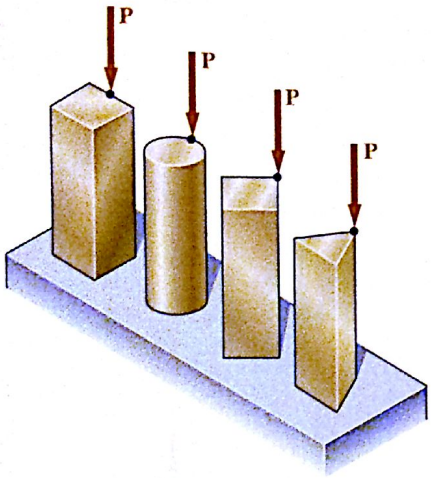


Figura P4.117

4.117 Las cuatro barras que se muestran en la figura tienen la misma área de sección transversal. Para las cargas dadas, muestre que *a*) los esfuerzos máximos de compresión tienen la razón 4:5:7:9, *b*) los esfuerzos máximos de tensión tienen la razón 2:3:5:3. (*Nota*: La sección transversal de la barra triangular es un triángulo equilátero.)

4.118 Si se sabe que el esfuerzo permisible en la sección *a-a* del soporte mostrado en la figura es de 150 MPa, determine *a*) la máxima fuerza vertical **P** que puede aplicarse en el punto *A*, *b*) la localización correspondiente del eje neutro en la sección *a-a*.

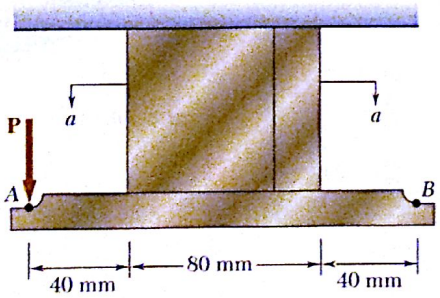
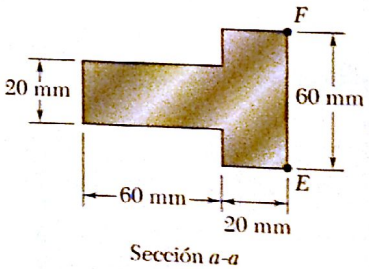


Figura P4.118



Sección *a-a*

4.119 Retome el problema 4.118, y ahora suponga que la fuerza vertical **P** se aplica en el punto *B*.

4.120 La barra de acero con forma de C se utiliza como un dinamómetro para determinar la magnitud P de las fuerzas mostradas. Si se sabe que la sección transversal de la barra es un cuadrado con lado de 1.6 in. y que después de medir la deformación unitaria en el borde interior se encontró que era de 450 μ, determine la magnitud P de las fuerzas. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

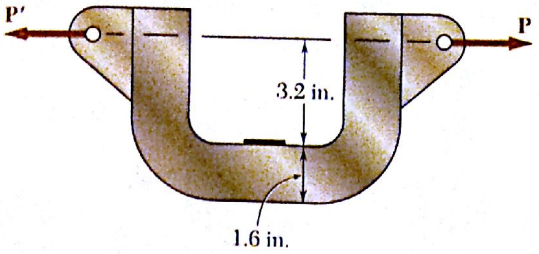


Figura P4.120

4.121 Un tramo corto de una columna de acero laminado soporta una placa rígida sobre la que se aplican dos cargas **P** y **Q**, como se muestra en la figura. Al medir las deformaciones unitarias en dos puntos A y B sobre la línea central de las caras externas de los patines se obtuvo

$$\epsilon_A = -400 \times 10^{-6} \text{ in./in.} \qquad \epsilon_B = -300 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la magnitud de cada carga.

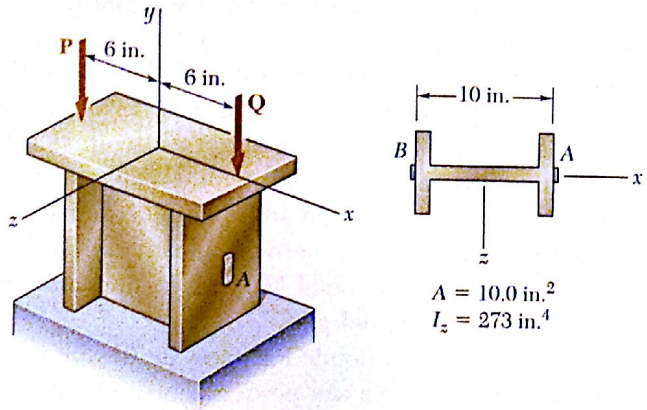


Figura P4.121

4.122 Una fuerza axial excéntrica **P** se aplica, como se muestra en la figura, a una barra de acero con sección transversal de 25 × 90 mm. Las deformaciones unitarias en A y B se midieron como

$$\epsilon_A = +350\,\mu \qquad \epsilon_B = -70\,\mu$$

Si se sabe que $E = 200$ GPa, determine *a*) la distancia d, *b*) la magnitud de la fuerza **P**.

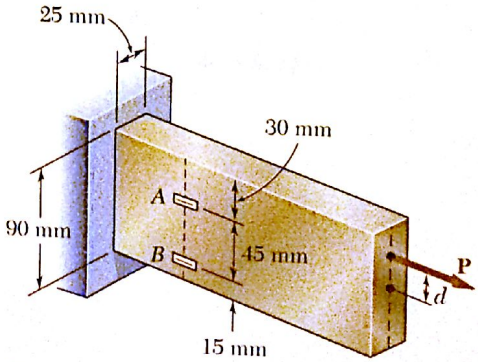


Figura P4.122

4.123 Retome el problema 4.122, y ahora suponga que las deformaciones unitarias medidas son

$$\epsilon_A = +600\,\mu \qquad \epsilon_B = +420\,\mu$$

4.124 La fuerza axial excéntrica **P** actúa en el punto D, que debe estar localizado 25 mm por debajo de la superficie superior de la barra de acero que se muestra en la figura. Para $P = 60$ kN, determine *a*) la profundidad d de la barra para la cual el esfuerzo de tensión en el punto A es máximo, *b*) el esfuerzo correspondiente en el punto A.

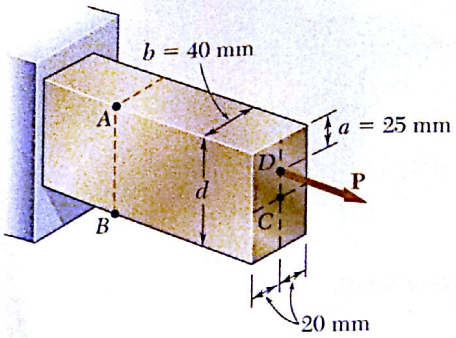


Figura *P4.124*

4.125 Para la barra y la carga del problema 4.124, determine *a*) la profundidad d de la barra para la cual el esfuerzo de compresión en el punto B es máximo, *b*) el esfuerzo correspondiente en el punto B.

4.13 FLEXIÓN ASIMÉTRICA

Hasta ahora, el estudio de la flexión pura se ha limitado a elementos que poseen por lo menos un plano de simetría y están sometidos a flexión en ese plano. Debido a la simetría de tales elementos y de sus cargas, se concluyó que éstos permanecían simétricos con respecto al plano de los pares, y que se flexionarían en dicho plano (vea la sección 4.3). Esto se ilustra en la figura 4.55: la parte *a* muestra la sección transversal de un elemento con dos planos de simetría, uno vertical y otro horizontal, y la parte *b* muestra la sección transversal de un elemento con un solo plano de simetría, vertical. En ambos casos el par actúa en el plano vertical de simetría del elemento y se representa mediante el vector horizontal **M**, y en los dos casos el eje neutro de la sección coincide con el eje del par.

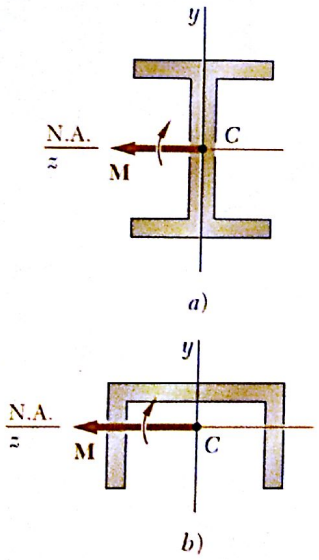


Figura 4.55

Ahora se estudiarán casos en donde los pares de flexión *no* actúan en un plano de simetría del elemento, ya sea porque actúan en un plano diferente o porque el elemento carece de plano de simetría. En tales casos, no es posible suponer que el elemento se flexiona en el plano de los pares. Esto se ilustra en la figura 4.56. En cada parte de la figura, se supone que el par ejercido sobre la sección actúa en un plano vertical y se ha representado me-

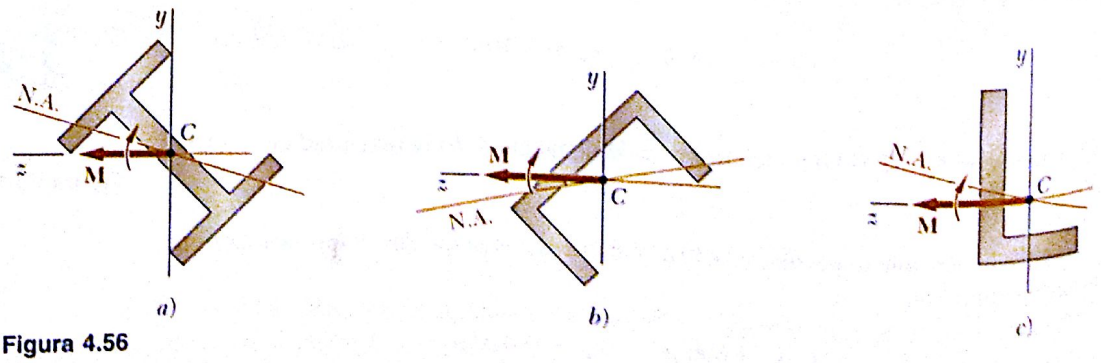


Figura 4.56

diante un momento horizontal **M**. Sin embargo, como el plano vertical no es de simetría, *no puede esperarse que el elemento se flexione en ese plano o que el eje neutro de la sección coincida con el eje del par.*

Se propone hallar las condiciones precisas para que el eje neutro de una sección transversal de forma arbitraria coincida con el eje del par **M** que representa las fuerzas que actúan en la sección. Tal sección se muestra en la figura 4.57 y tanto el vector **M** como el eje neutro se han supuesto dirigidos a lo largo del eje *z*. Recuerde, de la sección 4.2, que si se expresa que las

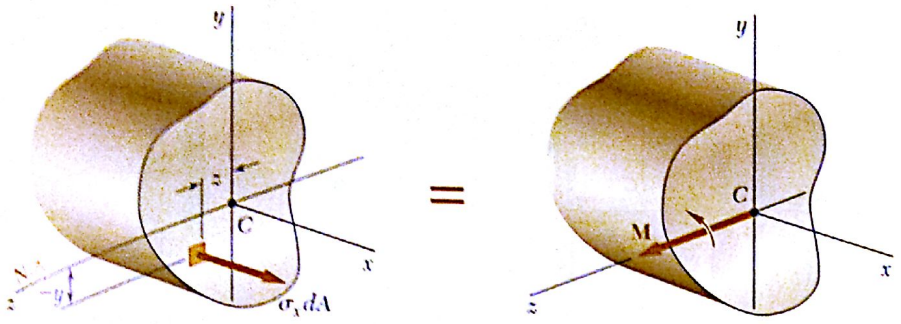


Figura 4.57

fuerzas elementales internas $\sigma_x dA$ forman un sistema equivalente a **M**, se obtiene

$$\text{componentes en } x: \qquad \int \sigma_x dA = 0 \tag{4.1}$$

$$\text{momentos con respecto al eje } y: \qquad \int z\sigma_x dA = 0 \tag{4.2}$$

$$\text{momentos con respecto al eje } z: \qquad \int (-y\sigma_x dA) = M \tag{4.3}$$

Como se analizó antes, si todos los esfuerzos están dentro del límite elástico, la primera ecuación conduce a la exigencia de que el eje neutro sea un eje centroidal, y la última, a la relación básica $\sigma_x = -My/I$. Como se había supuesto en la sección 4.2 que la sección transversal era simétrica con respecto al eje *y*, la ecuación (4.2) no se tomó en cuenta por trivial. Ahora que la sección es de forma arbitraria, la ecuación (4.2) se vuelve muy importante. Suponiendo que los esfuerzos permanecen dentro del límite de proporcionalidad del material, puede sustituirse $\sigma_x = -\sigma_m y/c$ en la ecuación (4.2) y escribir

$$\int z\left(-\frac{\sigma_m y}{c}\right) dA = 0 \qquad \text{o} \qquad \int yz\,dA = 0 \tag{4.51}$$

La integral $\int yz\,dA$ representa el producto de la inercia I_{yz} de la sección transversal con respecto a los ejes *y* y *z*, y será cero si estos ejes son los *ejes principales centroidales de la sección*.† Así es posible concluir que el eje neutro de la sección transversal coincidirá con el eje del par **M** que representa las fuerzas que actúan en esa sección *si, y sólo si, el vector* **M** *se dirige a lo largo de uno de los ejes centroidales principales de dicha sección transversal.*

† Véase Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1987, o *Vector Mechanics for Engineers*, 7a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2004, secciones 9.8-9.10.

Se nota que la expresión obtenida puede usarse también para calcular los esfuerzos en una sección asimétrica, tal como la de la figura 4.64, una vez que se han determinado los ejes principales centroidales y y z. Por otra parte, la ecuación (4.55) es válida sólo si las condiciones de aplicabilidad del principio de superposición se cumplen. En otras palabras, no puede utilizarse si los esfuerzos combinados exceden el límite de proporcionalidad del material, o si las deformaciones causadas por uno de los pares componentes afectan apreciablemente la distribución de esfuerzos debida a la otra.

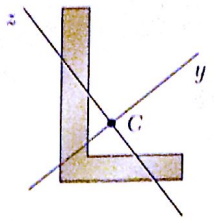


Figura 4.64

La ecuación (4.55) muestra que la distribución de esfuerzos causada por flexión asimétrica es lineal. Sin embargo, como se indicó antes en esta sección, el eje neutro de la sección transversal no coincidirá, en general, con el eje del par flector. Como el esfuerzo normal es 0 en cualquier punto del eje neutro, la ecuación que define ese eje puede obtenerse haciendo $\sigma_x = 0$ en la ecuación (4.55). Se escribe

$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0$$

o, resolviendo para y y sustituyendo M_z y M_y de las ecuaciones (4.52),

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y}\tan\theta\right) z \tag{4.56}$$

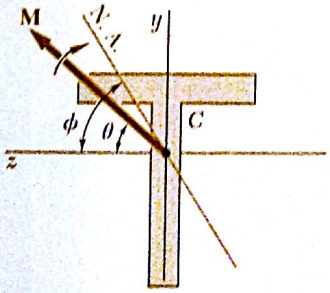


Figura 4.65

La ecuación obtenida es la de una línea recta con pendiente $m = (I_z/I_y)\tan\theta$. Así, el ángulo ϕ que forma el eje neutro con el eje z (figura 4.65) se define por la relación

$$\tan\phi = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta \tag{4.57}$$

donde θ es el ángulo que forma el vector **M** con el mismo eje. Como I_z e I_y son positivos, ϕ y θ tienen el mismo signo. Además, note que $\phi > \theta$ cuando $I_z > I_y$, y $\phi < \theta$ cuando $I_z < I_y$. Así, el eje neutro se localiza siempre entre el vector **M** y el eje principal correspondiente al mínimo momento de inercia.

EJEMPLO 4.08

Se aplica un par de 1 600 lb · in. a una viga de madera, de sección rectangular 1.5 por 3.5 in., en un plano que forma 30° con la vertical (figura 4.66). Determine *a*) el esfuerzo máximo en la viga, *b*) el ángulo que forma la superficie neutra con el plano horizontal.

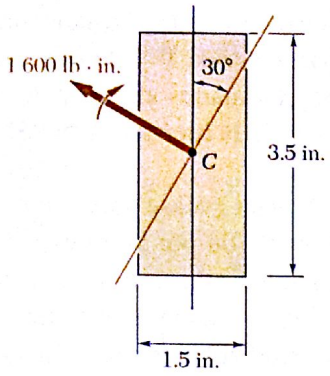


Figura 4.66

a) Esfuerzo máximo. Los componentes $\mathbf{M}_z$ y $\mathbf{M}_y$ del par se hallan primero (figura 4.67).

$$M_z = (1\,600 \text{ lb} \cdot \text{in.}) \cos 30° = 1\,386 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_y = (1\,600 \text{ lb} \cdot \text{in.}) \operatorname{sen} 30° = 800 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

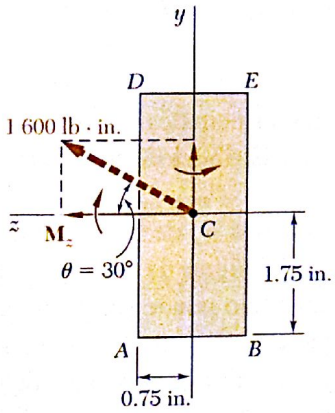


Figura 4.67

También se calculan los momentos de inercia de la sección transversal con respecto a los ejes z y y:

$$I_z = \tfrac{1}{12}(1.5 \text{ in.})(3.5 \text{ in.})^3 = 5.359 \text{ in.}^4$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}(3.5 \text{ in.})(1.5 \text{ in.})^3 = 0.9844 \text{ in.}^4$$

El mayor esfuerzo de tensión debido a $\mathbf{M}_z$ ocurre a lo largo de AB y es:

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{(1\,386 \text{ lb} \cdot \text{in.})(1.75 \text{ in.})}{5.359 \text{ in.}^4} = 452.6 \text{ psi}$$

El esfuerzo máximo de tensión debido a $\mathbf{M}_y$ ocurre a lo largo de AD y es

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{I_y} = \frac{(800 \text{ lb} \cdot \text{in.})(0.75 \text{ in.})}{0.9844 \text{ in.}^4} = 609.5 \text{ psi}$$

El esfuerzo máximo de tensión debido a la carga combinada, ocurre en A y es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 + \sigma_2 = 452.6 + 609.5 = 1\,062 \text{ psi}$$

El esfuerzo máximo de compresión tiene la misma magnitud y ocurre en E.

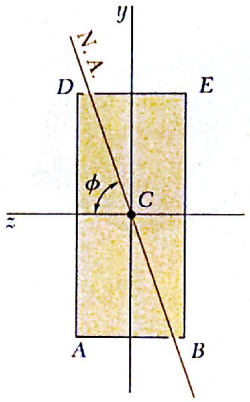


Figura 4.68

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta = \frac{5.359 \text{ in.}^4}{0.9844 \text{ in.}^4} \tan 30° = 3.143$$

$$\phi = 72.4°$$

En la figura 4.69 se observa la distribución de esfuerzos en la sección.

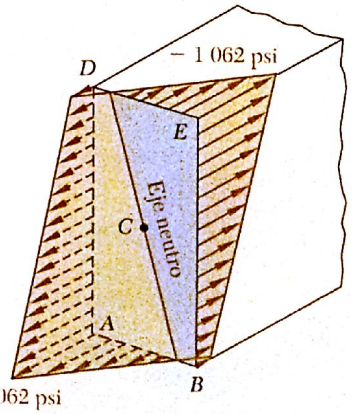


Figura 4.69

4.14 CASO GENERAL DE CARGA AXIAL EXCÉNTRICA

En la sección 4.12 se analizaron los esfuerzos producidos en un elemento por una carga axial excéntrica aplicada en un plano de simetría del elemento. Ahora se estudiará el caso más general, cuando la carga axial no se aplica en un plano de simetría.

Considere un elemento recto AB sometido a cargas axiales excéntricas iguales y opuestas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}'$ (figura 4.70*a*), y sean a y b las distancias de la línea de acción de las fuerzas a los ejes principales centroidales de la sección transversal del elemento. La carga excéntrica $\mathbf{P}$ es estáticamente equivalente al sistema que consta de una fuerza céntrica $\mathbf{P}$ y de dos pares $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ de elementos $M_y = Pa$ y $M_z = Pb$ representados en la figura 4.70*b*. Análogamente, la fuerza excéntrica $\mathbf{P}'$ equivale a la fuerza céntrica $\mathbf{P}'$ y los pares $\mathbf{M}'_y$ y $\mathbf{M}'_z$.

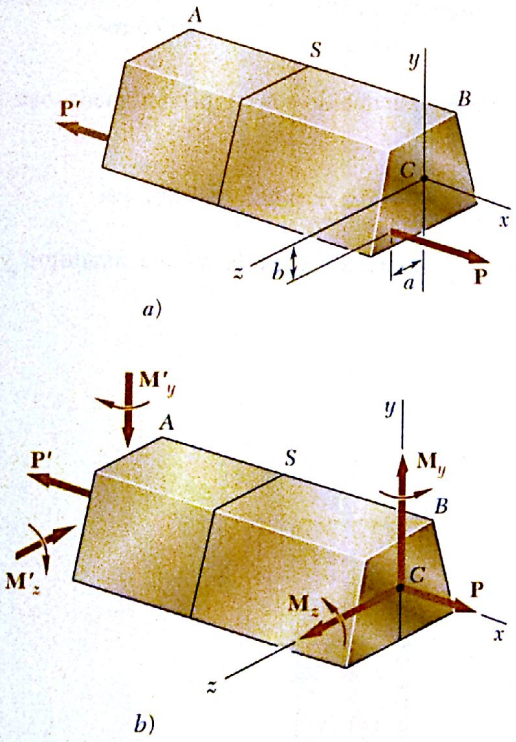


Figura 4.70

Gracias al principio de Saint-Venant (véase sección 2.17) puede reemplazarse la carga original de la figura 4.70*a* por la estáticamente equivalente de la figura 4.70*b* para determinar la distribución de esfuerzos en una sección S del elemento, siempre que dicha sección no esté muy cerca de un extremo del elemento. Además, los esfuerzos debidos a la carga de la figura 4.70*b* se obtienen superponiendo los esfuerzos correspondientes a la carga axial céntrica $\mathbf{P}$ y a los pares flectores $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$, siempre que las condiciones del principio de superposición se satisfagan (véase sección 2.12). Los esfuerzos debidos a la carga céntrica $\mathbf{P}$ están dados por la ecuación (1.5), y los esfuerzos debidos a los pares flectores por la ecuación (4.55), ya que los vectores pares correspondientes se dirigen a lo largo de los ejes principales centroidales de la sección. Por tanto,

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{4.58}$$

donde y y z se miden desde los ejes principales centroidales de la sección. La relación obtenida muestra que la distribución de esfuerzos en la sección es *lineal*.

Al calcular los esfuerzos combinados σ_x de la ecuación (4.58), debe tenerse cuidado con la determinación del signo de cada uno de los tres términos del lado derecho, puesto que cada uno puede ser positivo o negativo, dependiendo del sentido de las cargas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}'$ y de la localización de su línea de acción con respecto a los ejes principales centroidales de la sección transversal. Dependiendo de la geometría de la sección transversal y de la localización de la línea de acción de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}'$, los esfuerzos combinados σ_x obtenidos de la ecuación (4.58), en diferentes partes de la sección, pueden tener el mismo signo, o algunos pueden ser positivos y otros negativos. En el último caso, habrá una línea en la sección a lo largo de la cual los esfuerzos serán nulos. Haciendo $\sigma_x = 0$ en la ecuación (4.58), se obtiene la ecuación de una recta, que representa el *eje neutro* de la sección:

$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = \frac{P}{A}$$

EJEMPLO 4.09

Se aplica una carga vertical de 4.80 kN a un poste de madera, de sección rectangular, 80 por 120 mm (figura 4.71). *a*) Determine el esfuerzo en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. *b*) Localice el eje neutro de la sección transversal.

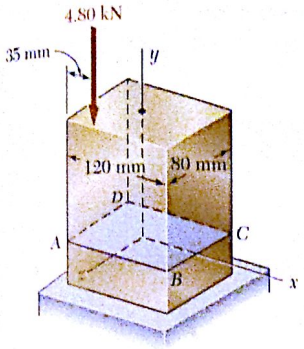


Figura 4.71

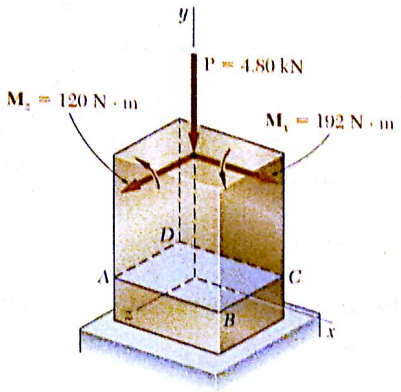


Figura 4.72

a) Esfuerzos. La carga excéntrica dada se reemplaza por un sistema equivalente que consta de una carga céntrica **P** y dos pares $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$ representados por vectores dirigidos a lo largo de los ejes centroidales principales de la sección (figura 4.72). Se tiene

$$M_x = (4.80\text{ kN})(40\text{ mm}) = 192\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = (4.80\text{ kN})(60\text{ mm} - 35\text{ mm}) = 120\text{ N} \cdot \text{m}$$

También se calcula el área y los momentos centroidales de inercia de la sección transversal.

$$A = (0.080\text{ m})(0.120\text{ m}) = 9.60 \times 10^{-3}\text{ m}^2$$

$$I_x = \tfrac{1}{12}(0.120\text{ m})(0.080\text{ m})^3 = 5.12 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

$$I_z = \tfrac{1}{12}(0.080\text{ m})(0.120\text{ m})^3 = 11.52 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

El esfuerzo σ_0 debido a la carga céntrica **P** es negativo y uniforme a través de la sección. Se tiene

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{-4.80\text{ kN}}{9.60 \times 10^{-3}\text{ m}^2} = -0.5\text{ MPa}$$

Los esfuerzos debidos a los pares de flexión $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$ se distribuyen linealmente en la sección, con valores máximos iguales respectivamente a

$$\sigma_1 = \frac{M_x z_{\text{máx}}}{I_x} = \frac{(192\text{ N} \cdot \text{m})(40\text{ mm})}{5.12 \times 10^{-6}\text{ m}^4} = 1.5\text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_z x_{\text{máx}}}{I_z} = \frac{(120\text{ N} \cdot \text{m})(60\text{ mm})}{11.52 \times 10^{-6}\text{ m}^4} = 0.625\text{ MPa}$$

Los esfuerzos en las esquinas de la sección son

$$\sigma_y = \sigma_0 \pm \sigma_1 \pm \sigma_2$$

donde los signos deben obtenerse de la figura 4.72. Notando que los esfuerzos debidos a $\mathbf{M}_x$ son positivos en *C* y *D*, y negativos en *A* y *B*, y que los esfuerzos debidos a $\mathbf{M}_z$ son positivos en *B* y *C*, y negativos en *A* y *D*, se obtiene

$$\sigma_A = -0.5 - 1.5 - 0.625 = -2.625\text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -0.5 - 1.5 + 0.625 = -1.375\text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -0.5 + 1.5 + 0.625 = +1.625\text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -0.5 + 1.5 - 0.625 = +0.375\text{ MPa}$$

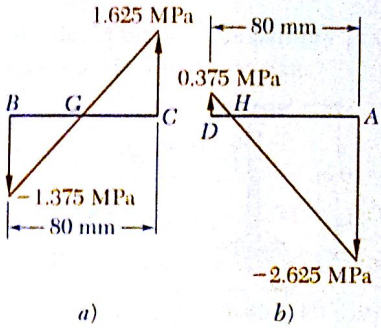


Figura 4.73

b) Eje neutro. Se descubre que el esfuerzo será cero en un punto *G* entre *B* y *C*, y en un punto *H* entre *D* y *A* (figura 4.73). Como la distribución de esfuerzos es lineal,

$$\frac{BG}{80\text{ mm}} = \frac{1.375}{1.625 + 1.375} \qquad BG = 36.7\text{ mm}$$

$$\frac{HA}{80\text{ mm}} = \frac{2.625}{2.625 + 0.375} \qquad HA = 70\text{ mm}$$

El eje neutro puede dibujarse por los puntos *G* y *H* (figura 4.74).

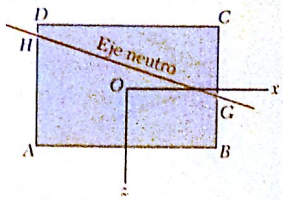


Figura 4.74

En la figura 4.75 se muestra la distribución de esfuerzos a través de la sección.

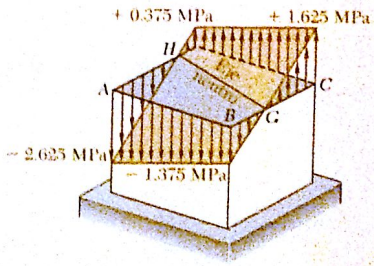
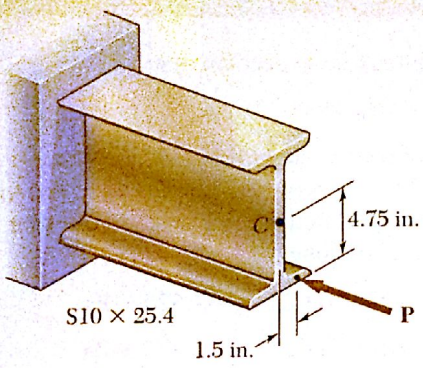


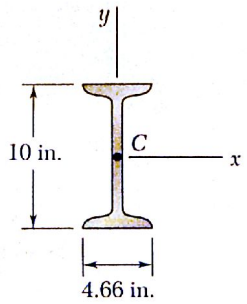
Figura 4.75

PROBLEMA MODELO 4.9



Se aplica una fuerza horizontal **P** a una sección corta de un elemento laminado de acero S10 × 25.4, como se indica en la figura. Si la compresión no debe pasar de 12 ksi, halle la **P** máxima permisible.

SOLUCIÓN



Propiedades de la sección transversal. Los datos siguientes provienen del apéndice C.

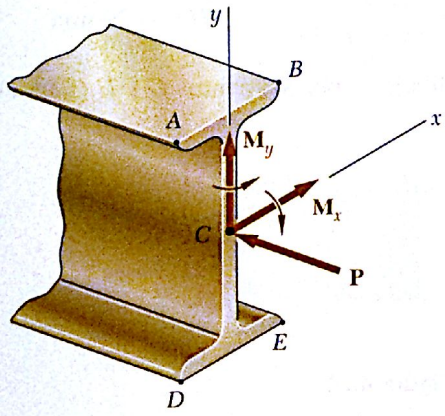
Área: $A = 7.46 \text{ in.}^2$

Módulos de la sección: $S_x = 24.7 \text{ in.}^3$ $\quad S_y = 2.91 \text{ in.}^3$

Fuerza y par en *C*. Se reemplaza **P** por un sistema equivalente fuerza-par en el centroide *C* de la sección.

$$M_x = (4.75 \text{ in.})P \qquad M_y = (1.5 \text{ in.})P$$

Se observa que los vectores $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_y$ se dirigen según los ejes principales de la sección transversal.



Esfuerzos normales. Los valores absolutos de los esfuerzos en los puntos *A*, *B*, *D* y *E* debidos, respectivamente, a la carga céntrica **P** y a los pares $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_y$ son

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{P}{7.46 \text{ in.}^2} = 0.1340P$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{S_x} = \frac{4.75P}{24.7 \text{ in.}^3} = 0.1923P$$

$$\sigma_3 = \frac{M_y}{S_y} = \frac{1.5P}{2.91 \text{ in.}^3} = 0.5155P$$

Superposición. El esfuerzo total en cada punto se halla superponiendo los esfuerzos debidos a **P**, $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_y$. El signo se obtiene escribiendo cuidadosamente el esquema del sistema fuerza-par.

$$\sigma_A = -\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -0.1340P + 0.1923P + 0.5155P = +0.574P$$

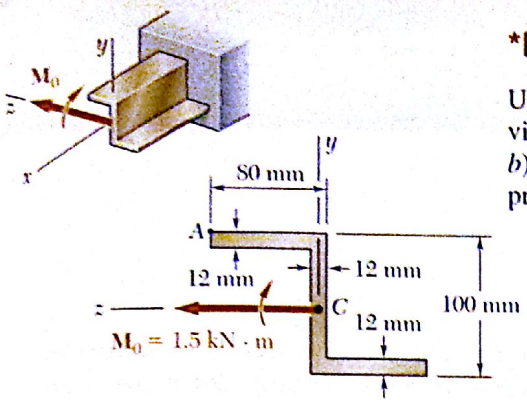
$$\sigma_B = -\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = -0.1340P + 0.1923P - 0.5155P = -0.457P$$

$$\sigma_D = -\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = -0.1340P - 0.1923P + 0.5155P = +0.189P$$

$$\sigma_E = -\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = -0.1340P - 0.1923P - 0.5155P = -0.842P$$

Máxima carga permisible. La compresión máxima ocurre en *E*. Recordando que $\sigma_{perm} = -12$ ksi,

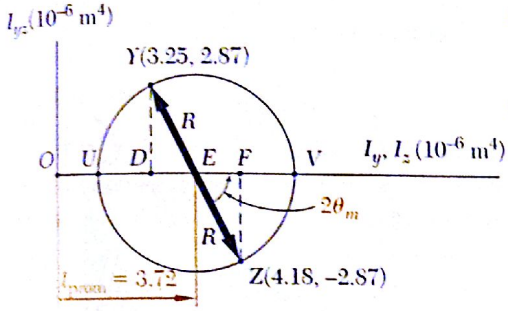
$$\sigma_{perm} = \sigma_E \qquad -12 \text{ ksi} = -0.842P \qquad P = 14.3 \text{ kips} \blacktriangleleft$$



*PROBLEMA MODELO 4.10

Un par de magnitud $M_0 = 1.5$ kN · m que actúa en un plano vertical se aplica a una viga cuya sección Z se muestra en la figura. Determine *a*) el esfuerzo en el punto *A*, *b*) el ángulo que el eje neutro forma con el plano horizontal. Los momentos y los productos de inercia con respecto a los ejes *y* y *z* son los siguientes:

$$I_y = 3.25 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$
$$I_z = 4.18 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$
$$I_{yz} = 2.87 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$



SOLUCIÓN

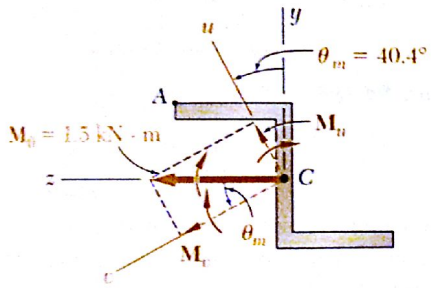
Ejes principales. Se dibuja el círculo de Mohr y se determina la orientación de los ejes principales y los correspondientes momentos de inercia.

$$\tan 2\theta_m = \frac{FZ}{EF} = \frac{2.87}{0.465} \qquad 2\theta_m = 80.8° \qquad \theta_m = 40.4°$$

$$R^2 = (EF)^2 + (FZ)^2 = (0.465)^2 + (2.87)^2 \qquad R = 2.91 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$I_u = I_{\text{mín}} = OU = I_{\text{prom}} - R = 3.72 - 2.91 = 0.810 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$I_v = I_{\text{máx}} = OV = I_{\text{prom}} + R = 3.72 + 2.91 = 6.63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$



Carga. Se descompone el momento aplicado $\mathbf{M}_0$ en sus componentes paralelas a los ejes principales.

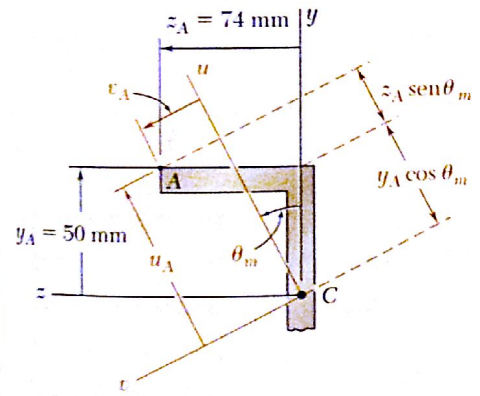
$$M_u = M_0 \operatorname{sen} \theta_m = 1\,500 \operatorname{sen} 40.4° = 972\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_v = M_0 \cos \theta_m = 1\,500 \cos 40.4° = 1\,142\ \text{N} \cdot \text{m}$$

***a*) Esfuerzo en *A*.** Las distancias perpendiculares de cada eje principal al punto *A* son:

$$u_A = y_A \cos \theta_m + z_A \operatorname{sen} \theta_m = 50 \cos 40.4° + 74 \operatorname{sen} 40.4° = 86.0\ \text{mm}$$

$$v_A = -y_A \operatorname{sen} \theta_m + z_A \cos \theta_m = -50 \operatorname{sen} 40.4° + 74 \cos 40.4° = 23.9\ \text{mm}$$



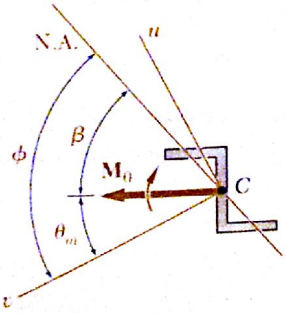
Considerando separadamente la flexión con respecto a cada eje principal, se nota que $\mathbf{M}_u$ produce un esfuerzo de tensión en el punto *A* mientras que $\mathbf{M}_v$ produce compresión en el mismo punto.

$$\sigma_A = +\frac{M_u v_A}{I_u} - \frac{M_v u_A}{I_v} = +\frac{(972\ \text{N} \cdot \text{m})(0.0239\ \text{m})}{0.810 \times 10^{-6}\ \text{m}^4} - \frac{(1\,142\ \text{N} \cdot \text{m})(0.0860\ \text{m})}{6.63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4}$$

$$= +28.68\ \text{MPa} - 14.81\ \text{MPa} \qquad \sigma_A = +13.87\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

***b*) Eje neutro.** El ángulo ϕ que el eje neutro forma con el eje *v* se halla por medio de la ecuación (4.57).

$$\tan \phi = \frac{I_v}{I_u} \tan \theta_m = \frac{6.63}{0.810} \tan 40.4° \qquad \phi = 81.8°$$



El ángulo β formado por los ejes neutro y horizontal es

$$\beta = \phi - \theta_m = 81.8° - 40.4° = 41.4° \qquad \beta = 41.4° \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

4.126 a *4.128* El par **M** se aplica a la viga cuya sección se muestra en la figura, en un plano que forma un ángulo β con la vertical. Determine el esfuerzo *a*) en el punto *A*, *b*) en el punto *B*, *c*) en el punto *D*.

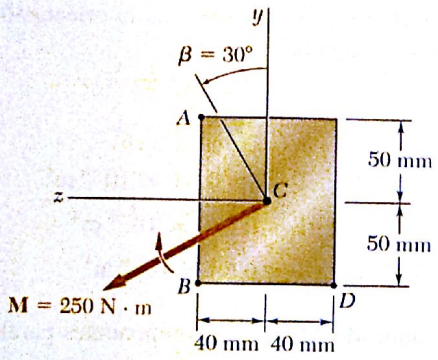


Figura P4.126

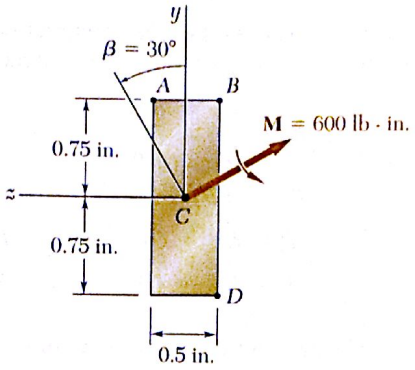


Figura P4.127

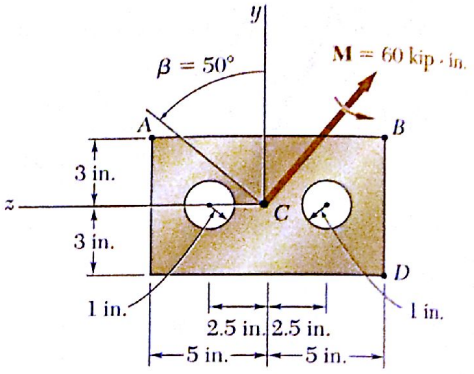


Figura *P4.128*

4.129 a 4.131 El par **M** se aplica a la viga cuya sección se muestra en la figura, en un plano que forma un ángulo β con la vertical. Determine el esfuerzo *a*) en el punto *A*, *b*) en el punto *B*, *c*) en el punto *D*.

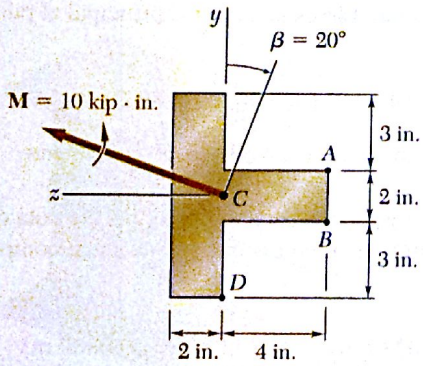


Figura P4.129

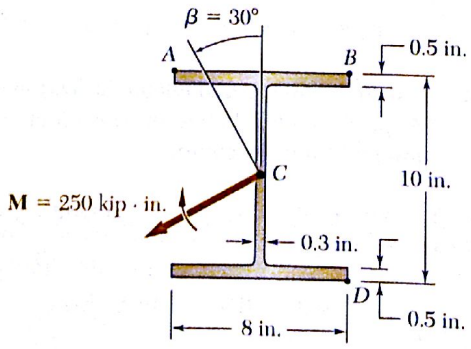


Figura *P4.130*

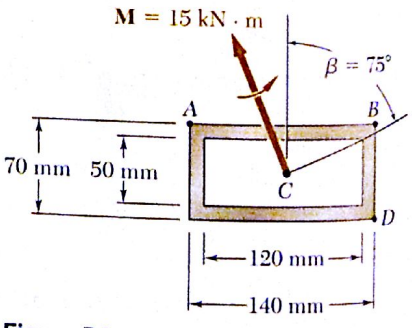


Figura P4.131

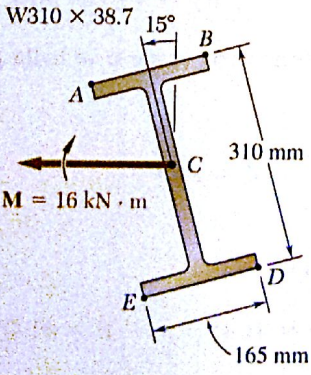


Figura P4.132

4.132 El par **M**, que actúa en un plano vertical, se aplica a una viga orientada tal como se muestra en la figura. Determine *a*) el ángulo que forma el eje neutro con la horizontal, *b*) el esfuerzo máximo de tensión en la viga.

4.133 y 4.134 El par **M**, que actúa en un plano vertical, se aplica a una viga orientada tal como se muestra en la figura. Determine *a*) el ángulo que forma el eje neutro con la horizontal, *b*) el esfuerzo máximo de tensión en la viga.

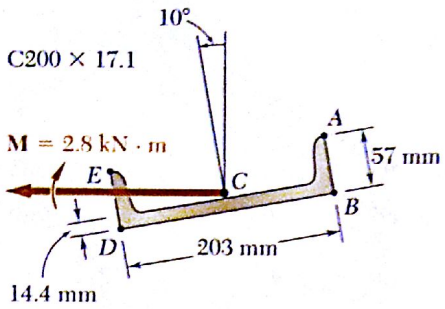


Figura *P4.133*

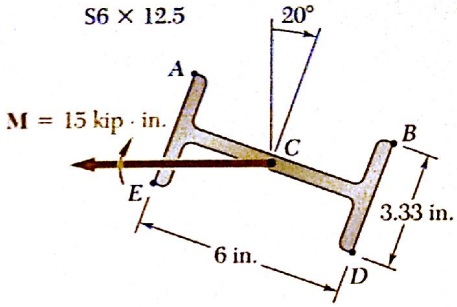
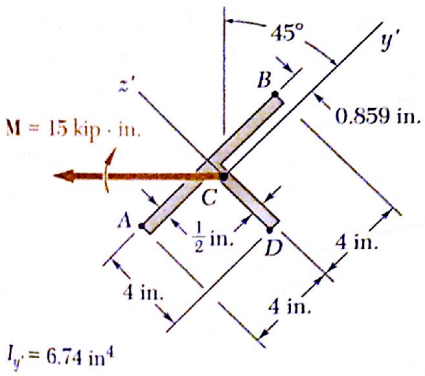


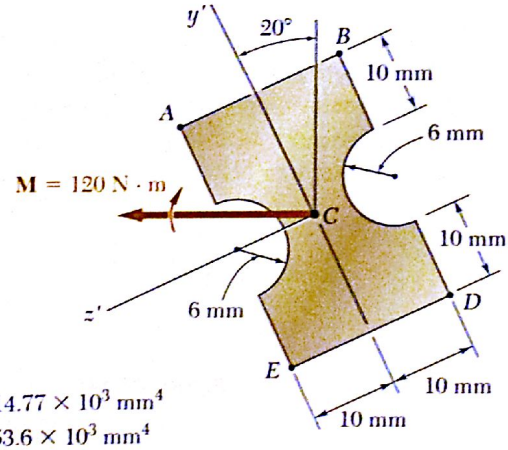
Figura P4.134

4.135 y 4.136 El par **M**, que actúa en un plano vertical, se aplica a una viga orientada como se muestra en la figura. Determine *a*) el ángulo que el eje neutro forma con la horizontal, *b*) el esfuerzo máximo de tensión en la viga.



$I_{y'} = 6.74 \text{ in}^4$
$I_{z'} = 21.4 \text{ in}^4$

Figura P4.135



$I_{y'} = 14.77 \times 10^3 \text{ mm}^4$
$I_{z'} = 53.6 \times 10^3 \text{ mm}^4$

Figura P4.136

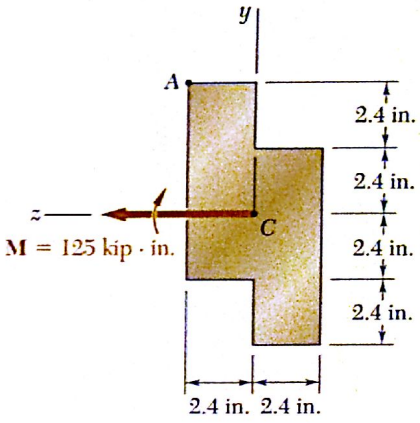
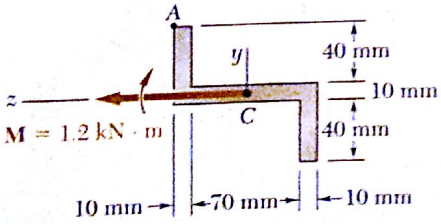


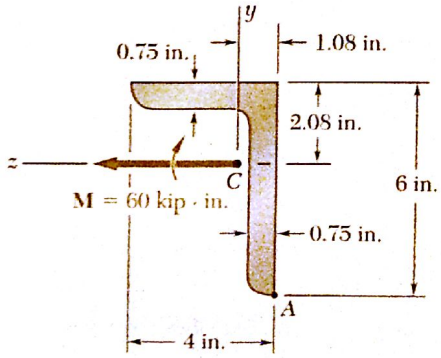
Figura P4.137

***4.137 a *4.139** El par **M** actúa en un plano vertical y se aplica a una viga orientada como se muestra en la figura. Determine el esfuerzo en el punto *A*.



$I_y = 1.894 \times 10^6 \text{ mm}^4$
$I_z = 0.614 \times 10^6 \text{ mm}^4$
$I_{yz} = +0.800 \times 10^6 \text{ mm}^4$

Figura P4.138



$I_y = 8.7 \text{ in}^4$
$I_z = 24.5 \text{ in}^4$
$I_{yz} = +8.3 \text{ in}^4$

Figura *P4.139*

4.140 Para la carga que se muestra en la figura, determine *a*) el esfuerzo en los puntos *A* y *B*, *b*) el punto donde el eje neutro interseca la línea *ABD*.

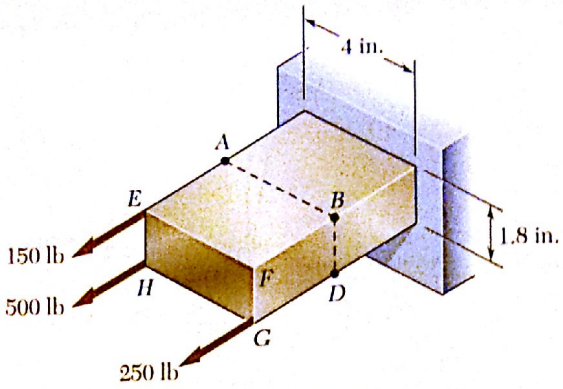


Figura P4.140

4.141 Retome el problema 4.140, y ahora suponga que la magnitud de la fuerza aplicada en *G* se incrementa de 250 lb a 400 lb.

4.142 El tubo que se muestra en la figura tiene un grosor de pared uniforme de 12 mm. Para las cargas dadas, determine *a*) el esfuerzo en los puntos *A* y *B*, *b*) el punto donde el eje neutro interseca la línea *ABD*.

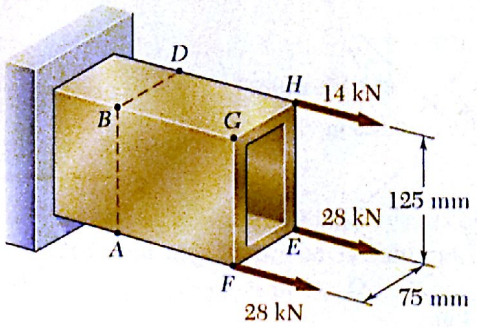


Figura P4.142

4.143 Retome el problema 4.142, y ahora suponga que se retira la fuerza de 28 kN en el punto *E*.

4.144 Una carga axial **P** de 50 kN de magnitud se aplica, como se muestra en la figura, a una sección corta de un elemento W150 × 24 de acero laminado. Determine la máxima distancia *a* para la que el esfuerzo de compresión máxima no excede 90 MPa.

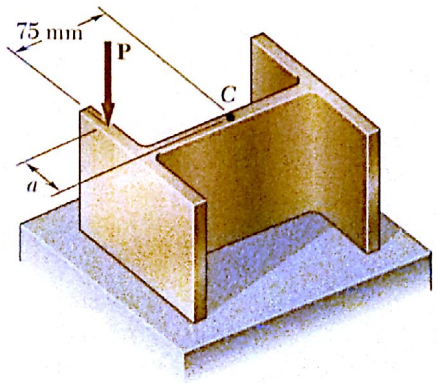


Figura P4.144

4.145 Una carga horizontal **P** de 100 kN de magnitud se aplica a la viga mostrada en la figura. Determine la distancia máxima a para la cual el esfuerzo de tensión máximo en la viga no excede 75 MPa.

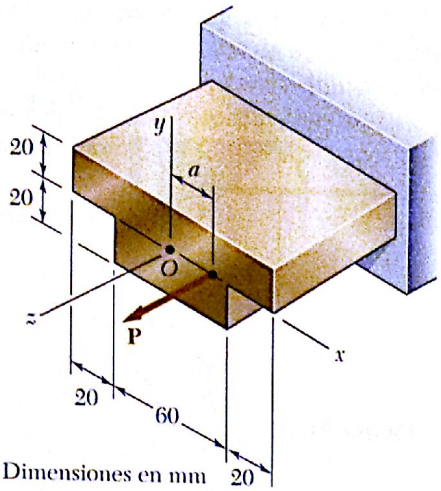


Figura *P4.145*

4.146 Una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se somete a un par $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical. Determine el valor máximo permisible del momento M_0 del par si el esfuerzo máximo en la viga no debe exceder 12 ksi. *Datos*: $I_y = I_z = 11.3$ in.^{4}, $A = 4.75$ in.^{2}, $k_{mín} = 0.983$ in. (*Sugerencia*: Por razones de simetría, los ejes principales forman un ángulo de 45° con los ejes coordenados. Utilice las relaciones $I_{mín} = Ak_{mín}^2$ e $I_{mín} + I_{máx} = I_y + I_z$.)

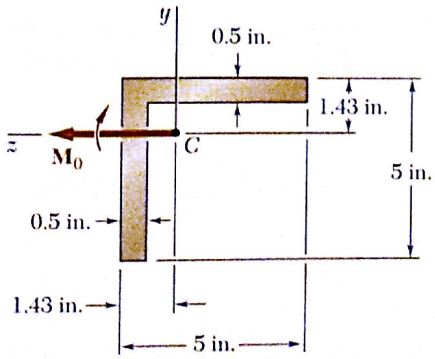


Figura P4.146

4.147 Retome el problema 4.146, y ahora suponga que el par $\mathbf{M}_0$ actúa en un plano horizontal.

4.148 La sección Z que se muestra en la figura se somete a un par $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical. Determine el valor máximo permisible del momento M_0 del par si el esfuerzo máximo no debe exceder 80 MPa. *Datos*: $I_{máx} = 2.28 \times 10^{-6}$ mm^4, $I_{mín} = 0.23 \times 10^{-6}$ mm^4, ejes principales 25.7°↖ y 64.3°↗.

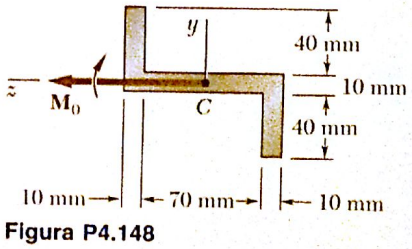


Figura P4.148

4.149 Retome el problema 4.148, y ahora suponga que el par $\mathbf{M}_0$ actúa en un plano horizontal.

4.150 Una viga que tiene la sección transversal que se muestra en la figura se somete a un par $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical. Determine el máximo valor permisible del momento M_0 del par si el esfuerzo máximo no debe exceder 100 MPa. *Datos*: $I_y = I_z = b^4/36$ e $I_{yz} = b^4/72$.

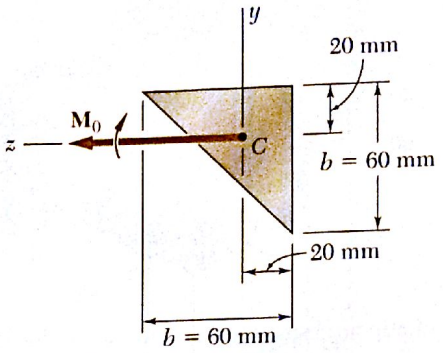


Figura P4.150

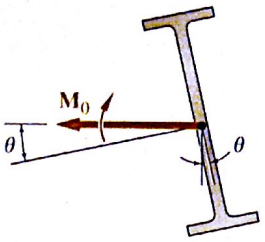


Figura P4.151

4.151 Un par $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical se aplica a una viga W12 × 16 de acero laminado, cuya alma forma un ángulo θ con la vertical. Denote con σ_0 el esfuerzo máximo en la viga cuando $\theta = 0$ y determine el ángulo de inclinación θ de la viga para el cual el esfuerzo máximo es $2\sigma_0$.

4.152 Una viga de sección transversal asimétrica se somete a un par $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical xy. Demuestre que el esfuerzo en el punto A, de coordenadas y y z es

$$\sigma_A = -\frac{yI_y - zI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2}M_z$$

donde I_y, I_z e I_{yz} denotan los momentos y el producto de inercia de la sección transversal respecto a los ejes coordenados y M_z el momento del par.

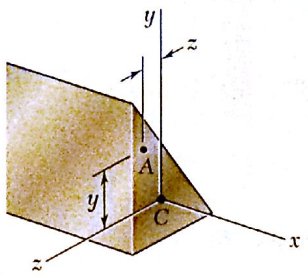


Figura P4.152 y P4.153

4.153 Una viga de sección transversal asimétrica se somete a un par $\mathbf{M}_0$ que actúa en un plano vertical xz. Demuestre que el esfuerzo en el punto A, de coordenadas y y z es

$$\sigma_A = \frac{zI_z - yI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2}M_y$$

donde I_y, I_z e I_{yz} denotan los momentos y el producto de inercia de la sección transversal respecto a los ejes coordenados y M_y el momento del par.

4.154 *a*) Muestre que el esfuerzo en la esquina *A* del elemento prismático que se muestra en la figura P4.154*a* será cero si la fuerza vertical **P** se aplica en un punto localizado sobre la línea

$$\frac{x}{b/6} + \frac{z}{h/6} = 1$$

b) Muestre además que, si no ocurre ningún esfuerzo de tensión en el elemento, la fuerza **P** debe aplicarse en un punto localizado dentro del área bordeada por la línea que se encontró en el inciso *a*) y las tres líneas similares correspondientes a la condición de cero esfuerzo en *B*, *C* y *D* respectivamente. Esta área, que se muestra en la figura P4.154*b*, se conoce como el *corazón* de la sección transversal.

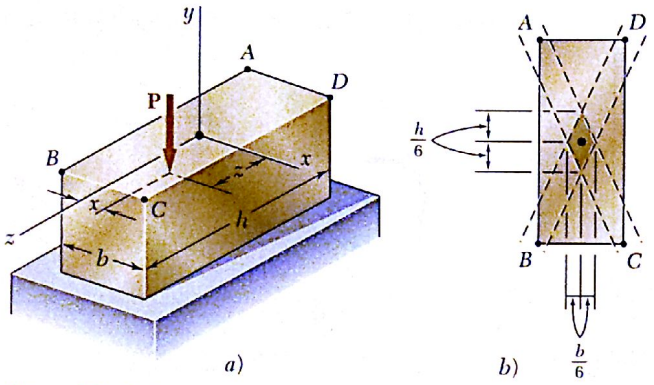


Figura P4.154

4.155 *a*) Muestre que, si se aplica una fuerza vertical **P** en el punto *A* de la sección mostrada en la figura, la ecuación del eje neutro *BD* es

$$\left(\frac{x_A}{k_z^2}\right)x + \left(\frac{z_A}{k_x^2}\right)z = -1$$

donde k_z y k_x denotan los radios de giro de la sección transversal respecto al eje *z* y al eje *x*, respectivamente. *b*) Muestre además que, si se aplica una fuerza vertical **Q** en cualquier punto localizado en la línea *BD*, el esfuerzo en el punto *A* será cero.

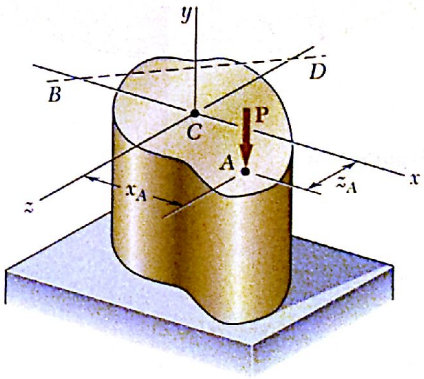


Figura P4.155

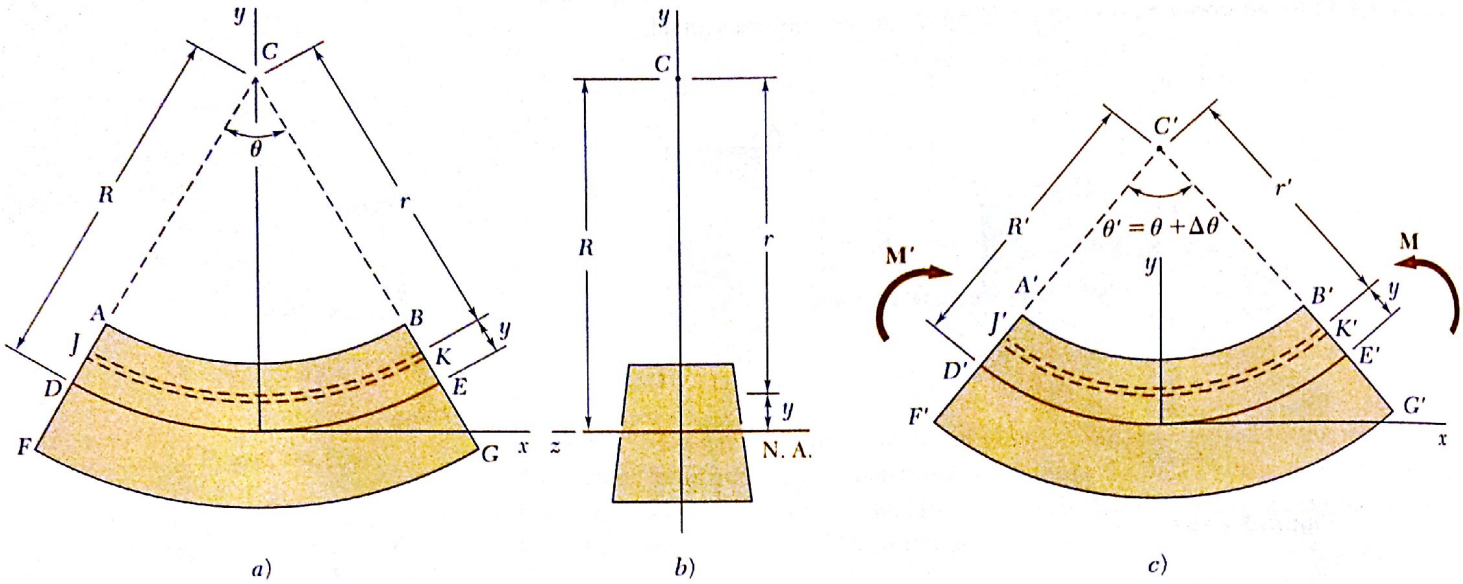
*4.15 FLEXIÓN DE ELEMENTOS CURVOS

El análisis de esfuerzos debidos a flexión se ha restringido a elementos rectos. En esta sección se considerarán los esfuerzos causados por la aplicación de pares iguales y opuestos a elementos inicialmente curvos. Este estudio se limitará a elementos curvos de sección transversal uniforme con un plano de simetría, en el cual actúan los pares flectores, y se supondrá que todos los esfuerzos permanecen por debajo del límite de proporcionalidad.

Si la curvatura inicial del elemento es pequeña, es decir, si su radio de curvatura es grande comparado con la altura de la sección, puede obtenerse una buena aproximación si se supone que el elemento es recto y se usan las ecuaciones de las secciones 4.3 y 4.4.† Sin embargo, cuando el radio de curvatura y las dimensiones de la sección transversal son del mismo orden de magnitud, debe utilizarse un método diferente de análisis, el cual fue introducido por el ingeniero alemán E. Winkler (1835-1888).

† Vea el problema 4.185.

Se estudiará el elemento curvo de sección transversal uniforme de la figura 4.76. Su sección transversal es simétrica con respecto al eje y (figura 4.76*b*) y, en su estado no esforzado, sus superficies superior e inferior intersecan el plano vertical xy según los arcos de círculo AB y FG centrados en C (figura 4.76*a*). Ahora se aplican dos pares iguales y opuestos $\mathbf{M}$ y $\mathbf{M}'$ en



a) *b)* *c)*

Figura 4.76

el plano de simetría del elemento (figura 4.76*c*). Un razonamiento similar al de la sección 4.3 mostraría que cualquier sección plana transversal que contenga a C permanecerá plana, y que los diversos arcos de círculo indicados en la figura 4.76*a* se transformarán en arcos circulares y concéntricos con un centro C' diferente de C. Más específicamente, si los pares $\mathbf{M}$ y $\mathbf{M}'$ se dirigen como se muestra, la curvatura de los diferentes arcos de círculo aumentará, esto es $A'C' < AC$. También se nota que los pares $\mathbf{M}$ y $\mathbf{M}'$ harán disminuir la longitud de la superficie superior del elemento ($A'B' < AB$) y la de la superficie inferior aumentará ($F'G' > FG$). Se concluye que debe existir una *superficie neutra* en el elemento, cuya longitud permanece constante. En la figura 4.76*a* se ha representado la intersección de la *superficie neutra* con el plano xy por el arco DE de radio R, y en la figura 4.76*c* por el arco $D'E'$ de radio R'. Si θ y θ' son los ángulos centrales correspondientes a DE y $D'E'$, se dice que la longitud de la superficie neutra permanece constante

$$R\theta = R'\theta' \tag{4.59}$$

Considerando ahora el arco del círculo JK localizado a una distancia y sobre la superficie neutra y designando por r y r' el radio de este arco antes de aplicar la flexión y después de ella se expresa el alargamiento de JK como

$$\delta = r'\theta' - r\theta \tag{4.60}$$

Observando en la figura 4.76 que

$$r = R - y \qquad r' = R' - y \tag{4.61}$$

y sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.60), se escribe

$$\delta = (R' - y)\theta' - (R - y)\theta$$

o, recordando la ecuación (4.59) y haciendo $\theta' - \theta = \Delta\theta$,

$$\delta = -y\,\Delta\theta \tag{4.62}$$

La deformación normal ϵ_x en los elementos de JK se obtiene dividiendo el alargamiento δ entre la longitud original $r\theta$ del arco JK.

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{r\theta} = -\frac{y\,\Delta\theta}{r\theta}$$

o, recordando la primera de las relaciones (4.61),

$$\epsilon_x = -\frac{\Delta\theta}{\theta}\frac{y}{R - y} \tag{4.63}$$

La relación obtenida muestra que, mientras cada sección transversal permanece plana, la deformación normal ϵ_x *no varía linealmente* con la distancia y desde la superficie neutra.

El esfuerzo normal σ_x puede obtenerse mediante la ley de Hooke, $\sigma_x = E\epsilon_x$, sustituyendo ϵ_x en la ecuación (4.63). Se tiene

$$\sigma_x = -\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\frac{y}{R - y} \tag{4.64}$$

o, alternativamente, recordando la primera de las ecuaciones (4.61)

$$\sigma_x = -\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\frac{R - r}{r} \tag{4.65}$$

La ecuación (4.64) muestra que, como ϵ_x, el esfuerzo normal σ_x *no varía linealmente* con la distancia y desde la superficie neutra. Graficando σ_x contra y, se obtiene un arco de hipérbole (figura 4.77).

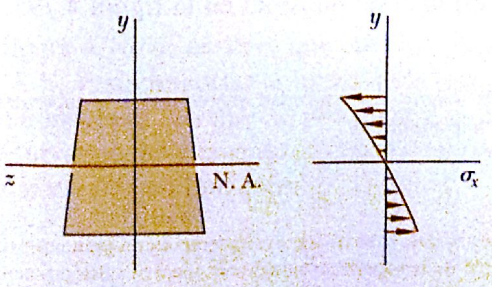


Figura 4.77

Para determinar la localización de la superficie neutra en el elemento y el valor del coeficiente $E\,\Delta\theta/\theta$, utilizado en las ecuaciones (4.64) y (4.65), recuerde ahora que las fuerzas elementales que actúan en cualquier sección transversal deben ser estáticamente equivalentes al momento flector **M**. Expresando, como lo hicimos en la sección 4.2 para un elemento recto, que la suma de las fuerzas elementales que actúan en la sección es cero, y que la suma de sus momentos con respecto al eje transversal z debe ser igual al momento flector M, se tiene

$$\int \sigma_x \, dA = 0 \tag{4.1}$$

y

$$\int (-y\sigma_x \, dA) = M \tag{4.3}$$

Sustituyendo σ_x de la ecuación (4.65) en la ecuación (4.1), se escribe

$$-\int \frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\,\frac{R-r}{r}\,dA = 0$$

$$\int \frac{R-r}{r}\,dA = 0$$

$$R\int \frac{dA}{r} - \int dA = 0$$

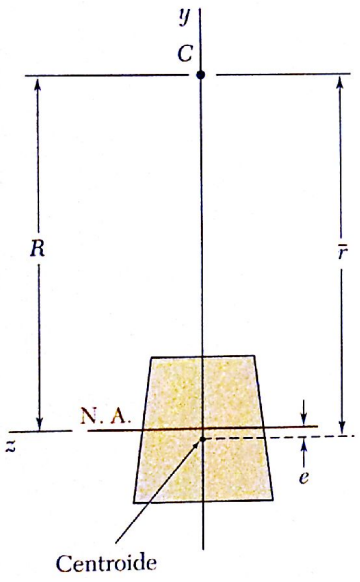


Figura 4.78

de donde se sigue que la distancia R desde el centro de curvatura C a la superficie neutra se da por la relación

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \tag{4.66}$$

Advierta que el valor obtenido para R no es igual a la distancia $\bar{r}$ desde C al centroide de la sección transversal pues $\bar{r}$ se define por una relación diferente, específicamente:

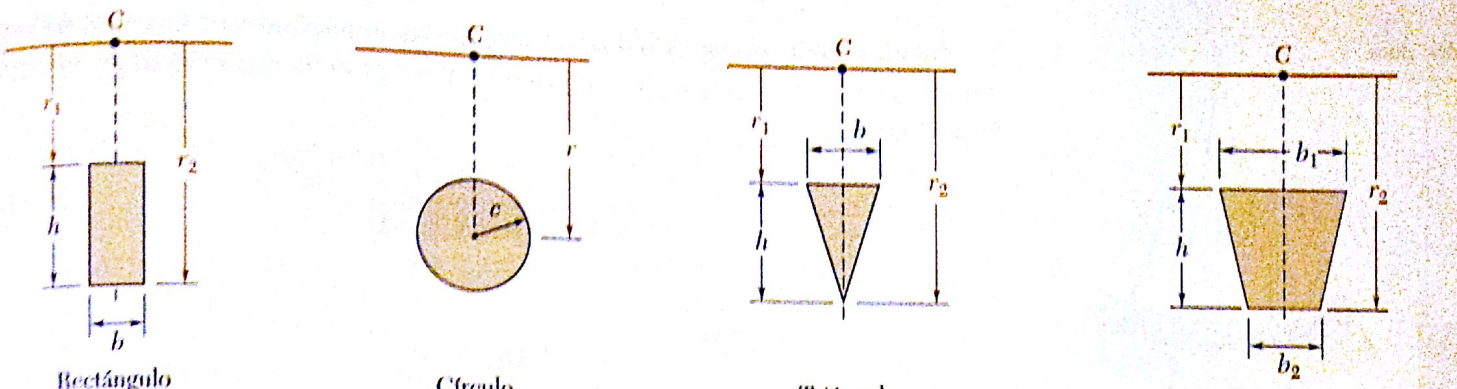
$$\bar{r} = \frac{1}{A}\int r\,dA \tag{4.67}$$

Se concluye así que, en un elemento curvo, *el eje neutro de una sección transversal no pasa por el centroide de la sección* (figura 4.78).† En el ejemplo 4.10 y en los problemas 4.207 a 4.209 se deducirán expresiones para el radio R de la superficie neutra, para algunas formas específicas. Por conveniencia, estas expresiones se muestran en la figura 4.79.

† Sin embargo, puede notarse una propiedad interesante de la superficie neutra si se escribe la ecuación (4.66) en la forma alternativa

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{A}\int \frac{1}{r}\,dA \tag{4.66'}$$

La ecuación (4.66′) muestra que, si se divide el elemento en un gran número de fibras de área transversal dA, la curvatura $1/R$ de la superficie neutra será igual al valor promedio de la curvatura $1/r$ de las diferentes fibras.



Rectángulo

$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Círculo

$$R = \tfrac{1}{2}\left(\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}\right)$$

Triángulo

$$R = \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{r_2}{h}\ln\frac{r_2}{r_1} - 1}$$

Trapecio

$$R = \frac{\frac{1}{2}h^2(b_1 + b_2)}{(b_1 r_2 - b_2 r_1)\ln\frac{r_2}{r_1} - h(b_1 - b_2)}$$

Figura 4.79 Radios de superficies neutras para varios tipos de secciones.

Sustituyendo ahora σ_x de la ecuación (4.65) en la ecuación (4.3),

$$\int \frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\,\frac{R - r}{r}\,y\,dA = M$$

o, como $y = R - r$,

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\int \frac{(R - r)^2}{r}\,dA = M$$

Desarrollando el cuadrado en el integrando, después de las simplificaciones, se obtiene:

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\left[R^2\int\frac{dA}{r} - 2RA + \int r\,dA\right] = M$$

Recordando las ecuaciones (4.66) y (4.67) se nota que el primer término entre paréntesis es igual a RA mientras el último es igual a $\bar{r}A$. Se tiene, entonces,

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}(RA - 2RA + \bar{r}A) = M$$

y, despejando a $E\,\Delta\theta/\theta$,

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{A(\bar{r} - R)} \tag{4.68}$$

Refiriéndose a la figura 4.76, se observa que $\Delta\theta > 0$ para $M > 0$. Se sigue que $\bar{r} - R > 0$, o $R < \bar{r}$, sin importar la forma de la sección. Así, el eje neutro de una sección transversal siempre se ubica entre el centroide de la sección y el centro de curvatura del elemento (figura 4.78). Haciendo $\bar{r} - R = e$, la ecuación (4.68) se escribe en la forma

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{Ae} \tag{4.69}$$

Sustituyendo por $E\,\Delta\theta/\theta$ de (4.69) en las ecuaciones (4.64) y (4.65) se obtiene la siguiente expresión alternativa para el esfuerzo normal σ_x en una viga curva:

$$\sigma_x = -\frac{My}{Ae(R-y)} \tag{4.70}$$

y

$$\sigma_x = \frac{M(r-R)}{Aer} \tag{4.71}$$

Debe notarse que el parámetro e en las ecuaciones de arriba es una cantidad pequeña obtenida restando dos longitudes de tamaños comparables, R y $\bar{r}$. Para calcular σ_x con un grado razonable de precisión, es necesario calcular R y $\bar{r}$ con mucha precisión, particularmente cuando ambas cantidades son grandes, es decir, cuando la curvatura del elemento es pequeña. Sin embargo, como se indicó antes, es posible, en tal caso, obtener una buena aproximación para σ_x usando la fórmula $\sigma_x = -My/I$ desarrollada para elementos rectos.

Ahora hay que determinar el cambio de curvatura de la superficie neutra causado por el momento flector M. Resolviendo la ecuación (4.59) para la curvatura $1/R'$ de la superficie neutra en el elemento deformado, se obtiene:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\frac{\theta'}{\theta}$$

o, haciendo $\theta' = \theta + \Delta\theta$ y recordando la ecuación (4.69),

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\Delta\theta}{\theta}\right) = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{M}{EAe}\right)$$

de donde se sigue que el cambio de curvatura de la superficie neutra es:

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAeR} \tag{4.72}$$

EJEMPLO 4.10

Una barra curva rectangular tiene radio medio $\bar{r} = 6$ in., una sección de ancho $b = 2.5$ in. y la altura $h = 1.5$ in. (figura 4.80). Determine la distancia e entre el centroide y el eje neutro de la sección transversal.

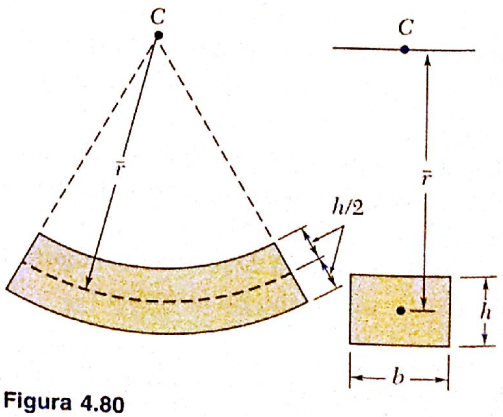


Figura 4.80

Primero se obtendrá la expresión para el radio R de la superficie neutra. Llamando r_1 y r_2, respectivamente, a los radios

interior y exterior de la barra (figura 4.81) usamos la ecuación (4.66) y se escribe

$$R = \frac{A}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dA}{r}} = \frac{bh}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{b\,dr}{r}} = \frac{h}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}}$$

$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{4.73}$$

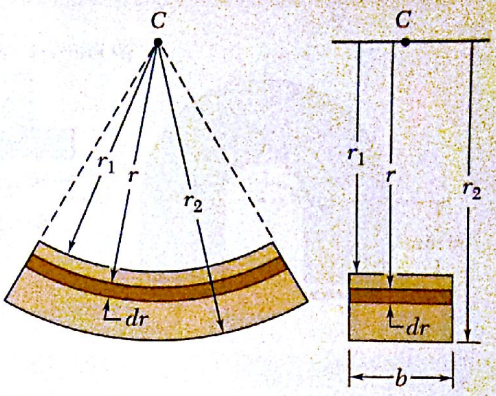


Figura 4.81

Para los datos, se tiene

$$r_1 = \bar{r} - \tfrac{1}{2}h = 6 - 0.75 = 5.25 \text{ in.}$$
$$r_2 = \bar{r} + \tfrac{1}{2}h = 6 + 0.75 = 6.75 \text{ in.}$$

Sustituyendo por h, r_1 y r_2 en la ecuación (4.73),

$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{1.5 \text{ in.}}{\ln \frac{6.75}{5.25}} = 5.9686 \text{ in.}$$

La distancia entre el centroide y el eje neutro de la sección transversal (figura 4.82) es, entonces,

$$e = \bar{r} - R = 6 - 5.9686 = 0.0314 \text{ in.}$$

Note que fue necesario calcular R con cinco cifras significativas para obtener e con el grado común de precisión.

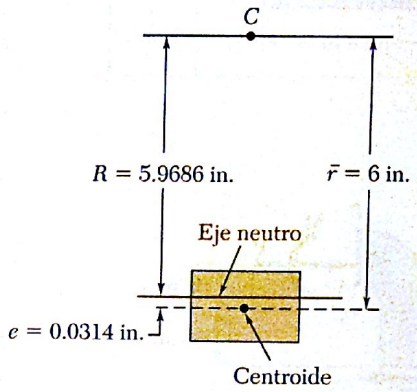


Figura 4.82

EJEMPLO 4.11

Para la barra del ejemplo 4.10, determine los mayores esfuerzos de tensión y de compresión considerando que el momento flector M en la barra es $M = 8$ kips · in.

Se utilizará la ecuación (4.71) con los datos dados

$$M = 8 \text{ kips} \cdot \text{in.} \qquad A = bh = (2.5 \text{ in.})(1.5 \text{ in}) = 3.75 \text{ in.}^2$$

y los valores obtenidos en el ejemplo 4.10 para R y e,

$$R = 5.969 \qquad e = 0.0314 \text{ in.}$$

Haciendo primero $r = r_2 = 6.75$ in. en la ecuación (4.71), se escribe

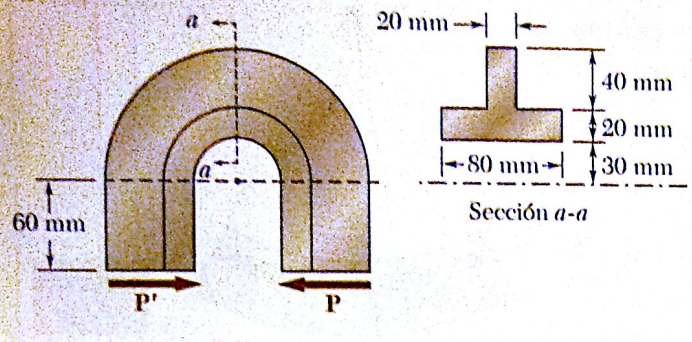
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M(r_2 - R)}{Aer_2}$$
$$= \frac{(8 \text{ kips} \cdot \text{in.})(6.75 \text{ in.} - 5.969 \text{ in.})}{(3.75 \text{ in.}^2)(0.0314 \text{ in.})(6.75 \text{ in.})}$$
$$\sigma_{\text{máx}} = 7.86 \text{ ksi}$$

Haciendo ahora $r = r_1 = 5.25$ in. en la ecuación (4.71),

$$\sigma_{\text{mín}} = \frac{M(r_1 - R)}{Aer_1}$$
$$= \frac{(8 \text{ kips} \cdot \text{in.})(5.25 \text{ in.} - 5.969 \text{ in.})}{(3.75 \text{ in.}^2)(0.0314 \text{ in.})(5.25 \text{ in.})}$$
$$\sigma_{\text{mín}} = -9.30 \text{ ksi}$$

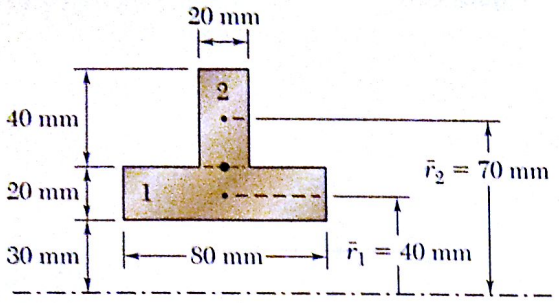
Nota: Los valores obtenidos para $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ pueden compararse con el resultado que se obtendría en una barra recta. Usando la ecuación (4.15) de la sección 4.4,

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \pm \frac{Mc}{I}$$
$$= \pm \frac{(8 \text{ kips} \cdot \text{in.})(0.75 \text{ in.})}{\frac{1}{12}(2.5 \text{ in.})(1.5 \text{ in.})^3} = \pm 8.53 \text{ ksi}$$



PROBLEMA MODELO 4.11

Una componente de máquina tiene una sección transversal en T y está cargada como se indica en la figura. Sabiendo que el esfuerzo de compresión permisible es de 50 MPa, halle la máxima fuerza **P** que puede aplicarse a la componente.



SOLUCIÓN

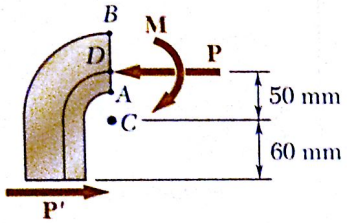
Centroide de la sección transversal. Se localiza el centroide D de la sección transversal.

	A_i, mm²	$\bar{r}_i$, mm	$\bar{r}_i A_i$, mm³
1	(20)(80) = 1 600	40	64×10^3
2	(40)(20) = 800	70	56×10^3
	$\Sigma A_i = 2\,400$		$\Sigma \bar{r}_i A_i = 120 \times 10^3$

$\bar{r} \Sigma A_i = \Sigma \bar{r}_i A_i$

$\bar{r}(2\,400) = 120 \times 10^3$

$\bar{r} = 50 \text{ mm} = 0.050 \text{ m}$

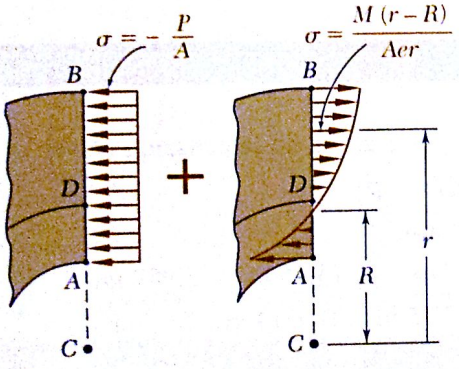


Fuerza y par en *D*. Las fuerzas internas en la sección a-a son equivalentes a una fuerza **P** que actúa en D y un par **M** de momento

$$M = P(50 \text{ mm} + 60 \text{ mm}) = (0.110 \text{ m})P$$

Superposición. La fuerza céntrica **P** causa un esfuerzo de compresión uniforme en la sección a-a. El momento flector **M** crea una distribución variable de esfuerzos [véase ecuación (4.71)]. Se observa que **M** tiende a aumentar la curvatura del elemento y es, por tanto, positivo (figura 4.76). El esfuerzo total de un punto de la sección a-a localizado a una distancia r del centro de curvatura C es

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M(r - R)}{Aer} \tag{1}$$



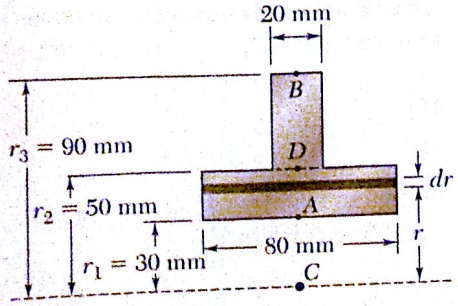
Radio de la superficie neutra. Ahora se calcula el radio R de la superficie neutra usando la ecuación (4.66).

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} = \frac{2\,400 \text{ mm}^2}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{(80 \text{ mm})\,dr}{r} + \int_{r_2}^{r_3} \frac{(20 \text{ mm})\,dr}{r}}$$

$$= \frac{2\,400}{80 \ln \frac{50}{30} + 20 \ln \frac{90}{50}} = \frac{2\,400}{40.866 + 11.756} = 45.61 \text{ mm}$$

$$= 0.04561 \text{ m}$$

También se calcula $e = \bar{r} - R = 0.05000 \text{ m} - 0.04561 \text{ m} = 0.00439 \text{ m}$



Carga permisible. Se observa que el esfuerzo máximo de compresión ocurrirá en el punto A, donde $r = 0.030$ m. Recordando que $\sigma_{perm} = 50$ MPa y usando la ecuación (1),

$$-50 \times 10^6 \text{ Pa} = -\frac{P}{2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{(0.110 \text{ P})(0.030 \text{ m} - 0.04561 \text{ m})}{(2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(0.00439 \text{ m})(0.030 \text{ m})}$$

$$-50 \times 10^6 = -417P - 5\,432P$$

$$P = 8.55 \text{ kN} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

4.156 Para la barra curva que se muestra en la figura, determine el esfuerzo en el punto A cuando *a*) $r_1 = 1.2$ in., *b*) $r_1 = 2$ in.

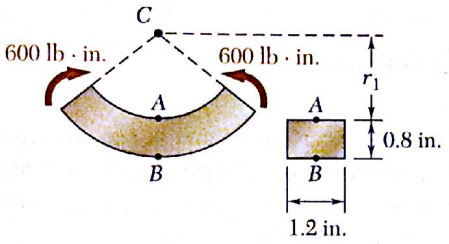


Figura P4.156 y P4.157

4.157 Para la barra curva que se muestra en la figura, determine el esfuerzo en los puntos A y B cuando $r_1 = 1.6$ in.

4.158 Para la barra curva y la carga que se muestran en la figura, determine el esfuerzo en los puntos A y B cuando $h = 55$ mm.

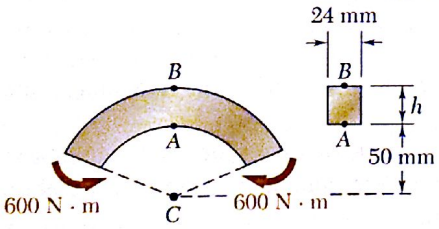


Figura P4.158 y *P4.159*

4.159 Para la barra curva y la carga que se muestran en la figura, determine el esfuerzo en el punto A cuando *a*) $h = 50$ mm, *b*) $h = 60$ mm.

4.160 La porción curva de la barra que se muestra en la figura tiene un radio interno de 20 mm. Si se sabe que el esfuerzo permisible en la barra es de 150 MPa, determine la distancia máxima permisible a desde la línea de acción de la fuerza de 3 kN hasta el plano vertical que contiene el centro de curvatura de la barra.

4.161 La porción curva de la barra que se muestra en la figura tiene un radio interno de 20 mm. Si se sabe que la línea de acción de la fuerza de 3 kN se localiza a una distancia $a = 60$ mm del plano vertical que contiene el centro de curvatura de la barra, determine el esfuerzo máximo de compresión en la barra.

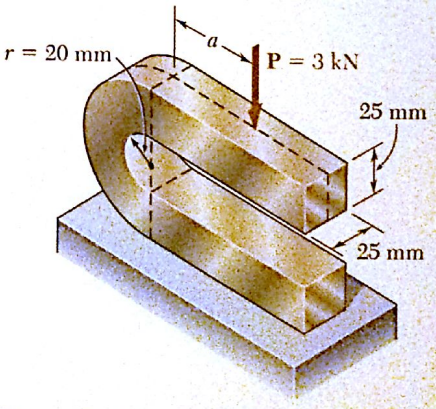


Figura P4.160 y *P4.161*

4.162 Para el anillo dividido que se muestra en la figura, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

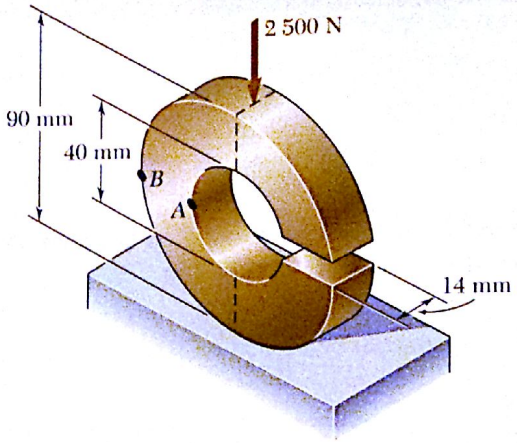


Figura P4.162

4.163 Los eslabones de acero que tiene la sección transversal mostrada en la figura se encuentran disponibles con diferentes ángulos centrales β. Si se sabe que el esfuerzo permisible es de 12 ksi, determine la fuerza máxima **P** que puede aplicarse a un eslabón para el que $\beta = 90°$.

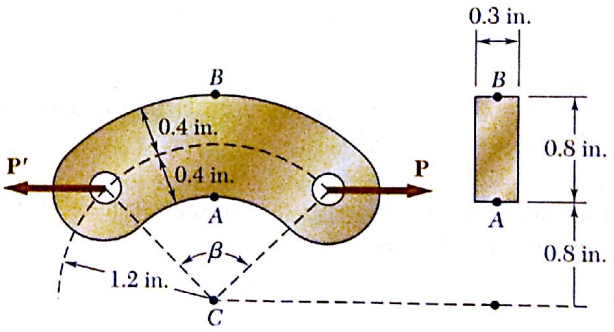


Figura P4.163

4.164 Retome el problema 4.163, y ahora suponga que $\beta = 60°$.

4.165 Tres placas se sueldan para formar la viga curva que se muestra en la figura. Para la carga dada, determine la distancia *e* entre el eje neutro y el centroide de la sección transversal.

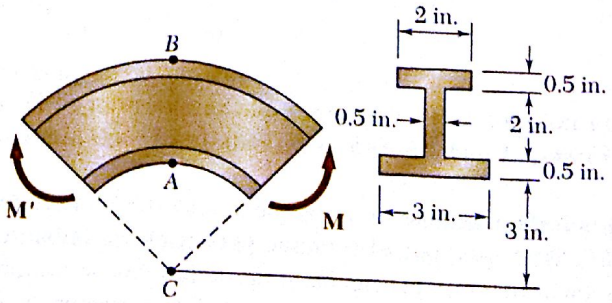


Figura *P4.165* y P4.166

4.166 Tres placas se sueldan para formar la viga curva que se muestra en la figura. Para $M = 8$ kip · in., calcule el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*, *c*) el centroide de la sección transversal.

4.167 y 4.168 Si se sabe que $M = 20$ kN · m, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

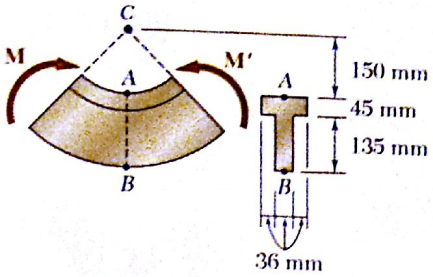


Figura P4.167

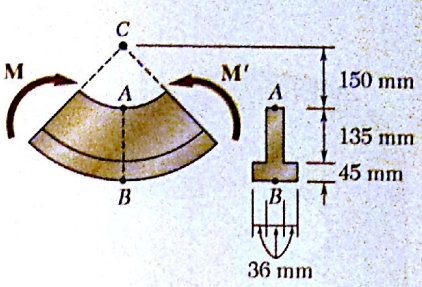


Figura P4.168

4.169 El anillo dividido que se muestra en la figura tiene un radio interior $r_1 = 20$ mm y una sección transversal *circular* con diámetro $d = 32$ mm. Para la carga mostrada en la figura, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

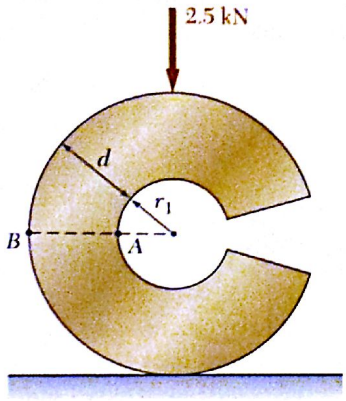


Figura P4.169 y P4.170

4.170 El anillo dividido que se ilustra en la figura tiene un radio interior $r_1 = 16$ mm y una sección transversal *circular* con diámetro $d = 32$ mm. Para la carga mostrada en la figura, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

4.171 El anillo dividido que se muestra en la figura tiene un radio interior $r_1 = 0.8$ in. y una sección transversal *circular* de diámetro $d = 0.6$ in. Si se sabe que cada una de las fuerzas de 120 lb se aplica en el centroide de la sección transversal, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

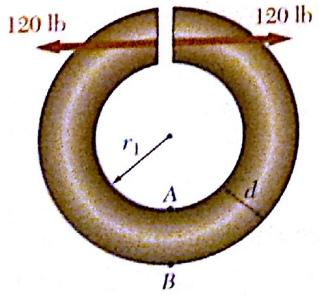


Figura P4.171

4.172 Retome el problema 4.171, y ahora suponga que el anillo tiene un radio interno $r_1 = 0.6$ in. y una sección transversal con diámetro $d = 0.8$ in.

4.173 Para el gancho mostrado en la figura, determine el esfuerzo máximo de tensión en la sección *a-a*.

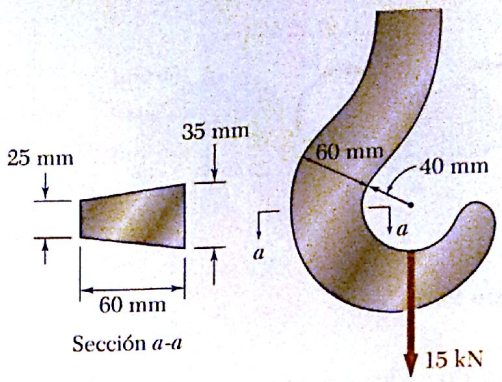


Figura *P4.173*

4.174 Para la viga curva y la carga que se muestran en la figura, determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

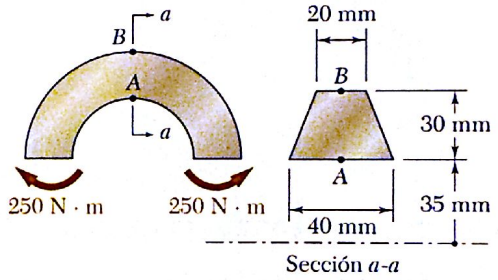


Figura P4.174

4.175 Si se sabe que el componente de máquina mostrado en la figura tiene una sección transversal trapezoidal con $a = 3.5$ in. y $b = 2.5$ in., determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

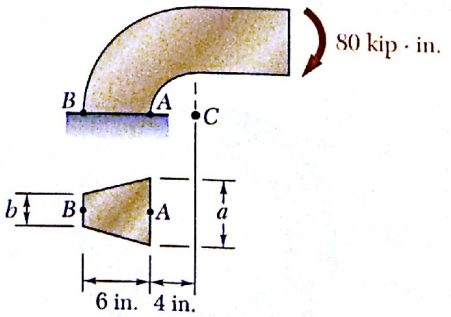


Figura *P4.175* y P4.176

4.176 Si se sabe que el componente de máquina mostrado en la figura tiene una sección transversal trapezoidal con $a = 2.5$ in. y $b = 3.5$ in., determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

4.177 y 4.178 Si se sabe que $M = 5$ kip · in., determine el esfuerzo en *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

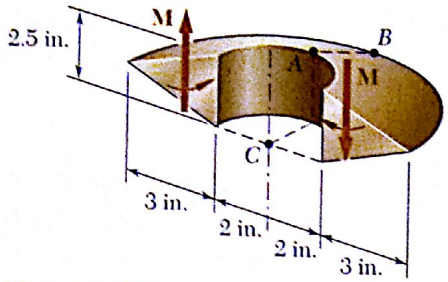


Figura P4.177

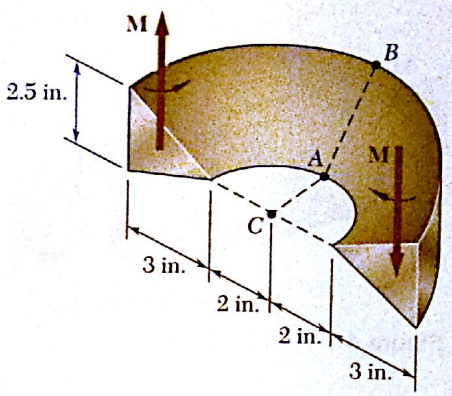


Figura *P4.178*

4.179 Demuestre que si la sección transversal de una viga curva consta de dos o más rectángulos, el radio R de la superficie neutra se expresa como:

$$R = \frac{A}{\ln\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{b_1}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{b_2}\left(\frac{r_4}{r_3}\right)^{b_3}\right]}$$

donde A es el área total de la sección.

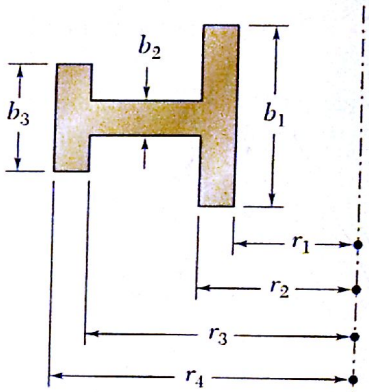


Figura P4.179

4.180 a 4.182 Mediante la ecuación (4.66) deduzca la expresión para R dada en la figura 4.79 para

***4.180** Una sección transversal circular.
4.181 Una sección transversal trapezoidal.
4.182 Una sección transversal triangular.

***4.183** Para una barra curva de sección rectangular sometida a un momento flector **M**, demuestre que el esfuerzo radial en la superficie neutra es

$$\sigma_r = \frac{M}{Ae}\left(1 - \frac{r_1}{R} - \ln\frac{R}{r_1}\right)$$

y calcule el valor de σ_r para la barra curva de los ejemplos 4.10 y 4.11. (*Sugerencia*: Considere el diagrama de cuerpo libre de la porción de la viga situada encima de la superficie neutra.)

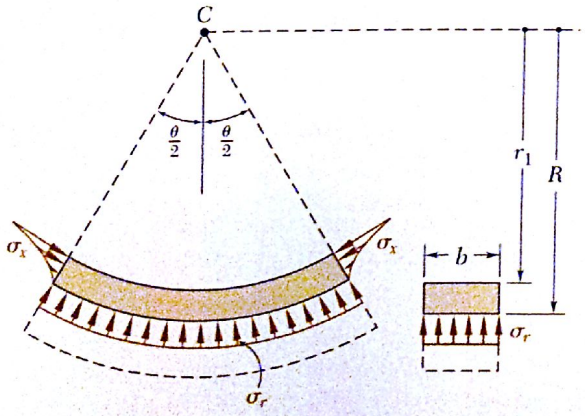


Figura P4.183

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 4

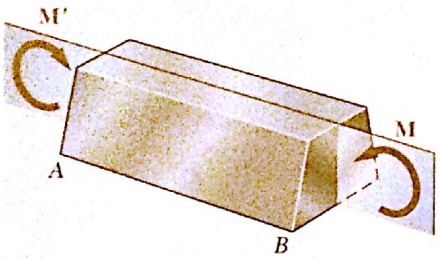


Figura 4.1

Este capítulo estuvo dedicado al análisis de elementos sometidos a *flexión pura*. Se han considerado los esfuerzos y deformaciones de elementos sometidos a pares iguales y opuestos **M** y **M'** que actúan en el mismo plano longitudinal (figura 4.1).

Primero se estudiaron elementos con un plano de simetría, sometidos a pares que actúan en ese plano. Al considerar las posibles deformaciones del elemento, se demostró que las *secciones transversales permanecen planas* cuando el elemento es deformado [sección 4.3]. Entonces se observó que un elemento sometido a flexión pura tiene una *superficie neutra* a lo largo de la cual las deformaciones y los esfuerzos normales son nulos y que la *deformación longitudinal normal* ϵ_x *varía linealmente* con la distancia y a la superficie neutra:

Deformación normal en la flexión

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{4.8}$$

donde ρ es el *radio de curvatura* de la superficie neutra (figura 4.12*a*). La intersección de la superficie neutra con una sección transversal se conoce como *eje neutro* de la sección.

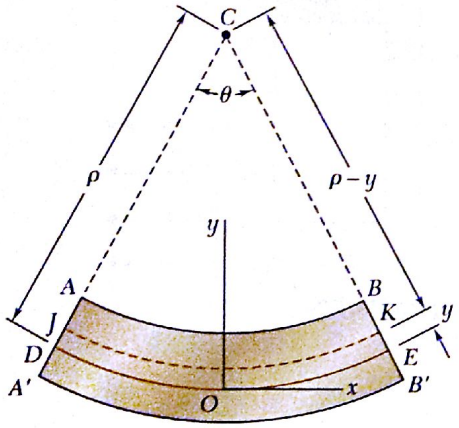


Figura 4.12*a*

Para elementos hechos de un material que cumple la ley de Hooke [sección 4.4] se halló que el *esfuerzo normal* σ_x *varía linealmente* con la distancia al eje neutro (figura 4.13). Si σ_m es el esfuerzo máximo,

Esfuerzo normal en el rango elástico

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \tag{4.12}$$

donde c es la mayor distancia del eje neutro a un punto de la sección.

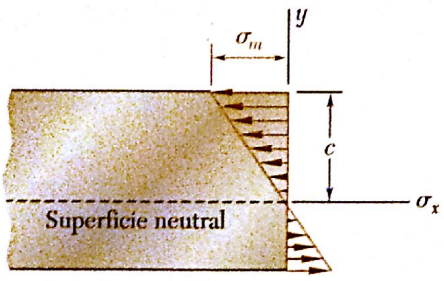


Figura 4.13

Haciendo la suma de las fuerzas elementales $\sigma_x\,dA$ igual a cero, se probó que el *eje neutro pasa por el centroide* de la sección de un elemento sujeto a flexión pura. Luego, haciendo la suma de los momentos de las fuerzas elementales igual al momento flector, se dedujo la *ecuación de la flexión elástica* para el esfuerzo máximo normal

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

en donde I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje neutro. También se obtuvo el esfuerzo normal a cualquier distancia y desde el eje neutro:

Ecuación de flexión elástica

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

Notando que I y c sólo dependen de la geometría de la sección transversal, se introdujo el concepto de *módulo elástico de la sección*

Módulo elástico de la sección

$$S = \frac{I}{c} \tag{4.17}$$

y luego se utilizó el módulo de la sección para escribir una expresión alternativa para el esfuerzo normal máximo:

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \tag{4.18}$$

Recordando que la curvatura de un elemento es el inverso de su radio de curvatura, se expresó la *curvatura* del elemento como:

Curvatura del elemento

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{4.21}$$

En la sección 4.5 se completó el estudio de la flexión de elementos homogéneos con un plano de simetría notando que las deformaciones ocurren en el plano de la sección transversal y producen una *curvatura anticlástica* de los elementos.

Curvatura anticlástica

Después se estudió la flexión de elementos hechos de varios materiales con *módulos de elasticidad diferentes* [sección 4.6]. Mientras las secciones transversales permanecen planas, se halló que, en general, *el eje neutro no pasa por el centroide* de la sección transversal compuesta (figura 4.24). Usando la relación entre los módulos de elasticidad de los materiales, se obtuvo una *sección transformada* correspondiente a un elemento equivalente, hecho enteramente de un solo material. Después se utilizaron los métodos previamente desarrollados para determinar los esfuerzos en este elemento homogéneo equivalente (figura 4.26), y luego se usó, de nuevo, la relación entre los módulos de elasticidad para hallar los esfuerzos en la viga compuesta (véanse problemas modelo 4.3 y 4.4).

Elementos hechos de varios materiales

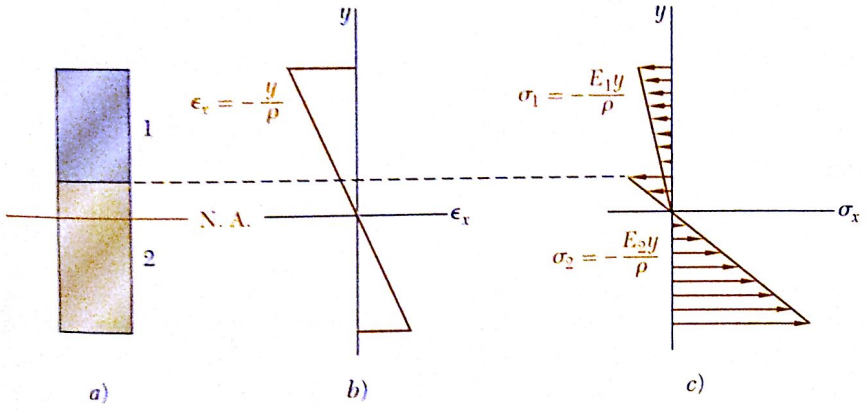


Figura 4.24

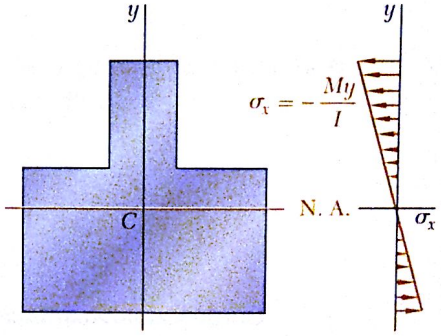


Figura 4.26

En la sección 4.7 se discutieron las *concentraciones de esfuerzos* que se producen en elementos sometidos a flexión pura y se dieron gráficos de factores de concentración de esfuerzos para barras planas con soldadura de filete y ranuras en las figuras 4.31 y 4.32.

Concentraciones de esfuerzos

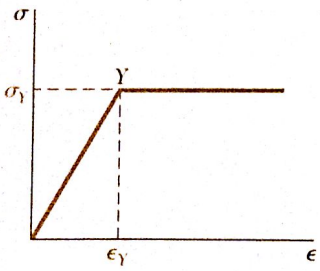


Figura 4.39

Después se estudiaron elementos hechos de materiales que no cumplen la ley de Hooke [sección 4.8]. Se analizó una viga rectangular, hecha de un *material elastoplástico* (figura 4.39), a medida que la magnitud del momento flector se aumentaba. El *máximo momento elástico* M_Y ocurría cuando se iniciaba la fluencia en la viga (figura 4.40). Al incrementar aún más el momento flector, se desarrollaban zonas plásticas y el tamaño del núcleo elástico disminuía [sección 4.9]. Finalmente la viga se volvía completamente plástica y se obtenía el máximo momento o *momento plástico* M_p. En la sección 4.11 se encontró que después de retirar las cargas que produjeron fluencia, se presentan en el elemento *deformaciones permanentes y esfuerzos residuales*.

Deformaciones plásticas

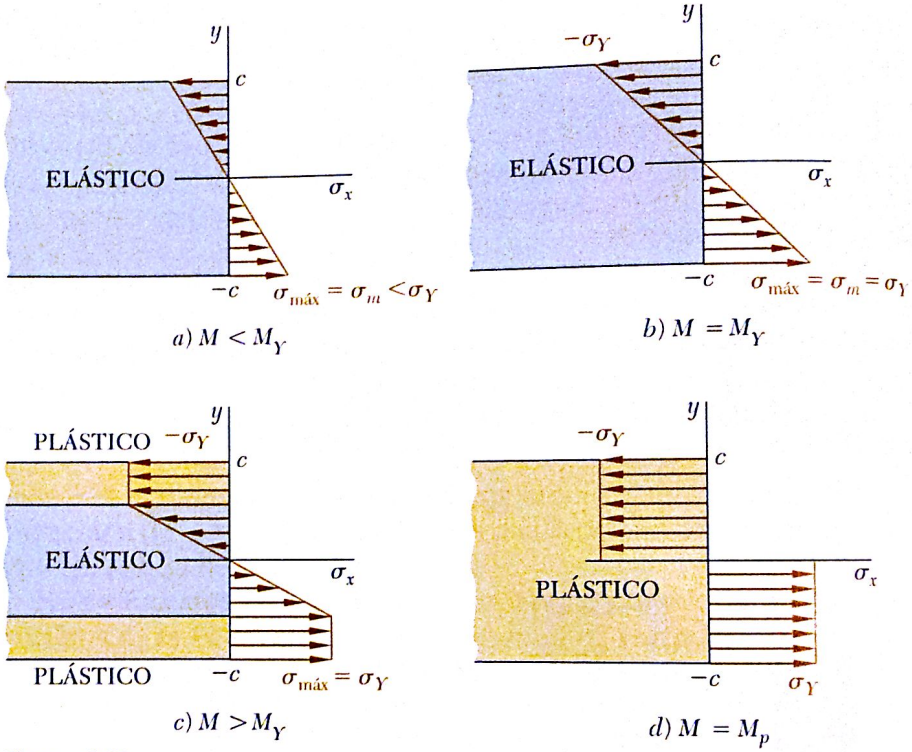


Figura 4.40

Carga axial excéntrica

En la sección 4.12 se estudiaron los esfuerzos en elementos cargados *excéntricamente en un plano de simetría*. En este análisis se usaron métodos desarrollados antes. Se reemplazó la *carga excéntrica* por un sistema fuerza-par localizado en el centroide de la sección transversal (figura 4.48*b*) y luego se superpusieron los esfuerzos debidos a carga céntrica y al par flector (figura 4.51):

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \tag{4.50}$$

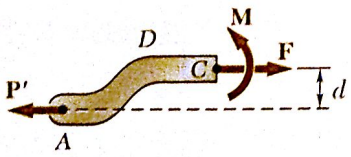


Figura 4.48*b*

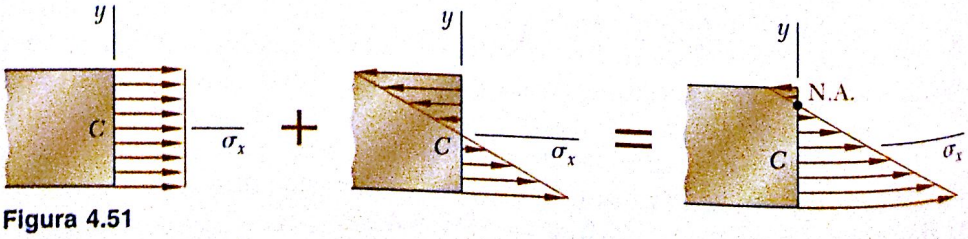


Figura 4.51

Se estudió luego la flexión de elementos de *sección asimétrica* [sección 4.13]. Se observó que la ecuación de flexión puede usarse siempre que el vector **M** se dirija a lo largo de uno de los ejes centroidales principales de la sección. Cuando fue necesario se descompuso **M** en componentes a lo largo de los ejes principales y se superpusieron los esfuerzos debidos a los pares componentes (véanse figuras 4.60 y 4.61).

Flexión asimétrica

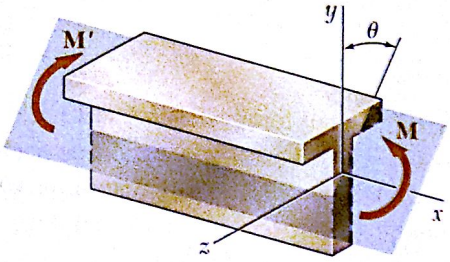


Figura 4.60

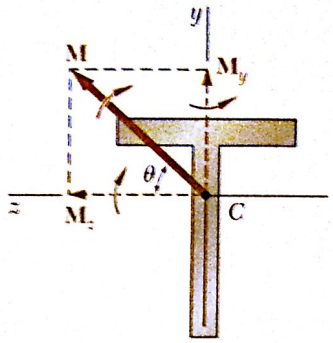


Figura 4.61

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{4.55}$$

Para el par **M** mostrado en la figura 4.65, se determinó la orientación del eje neutro escribiendo

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \tag{4.57}$$

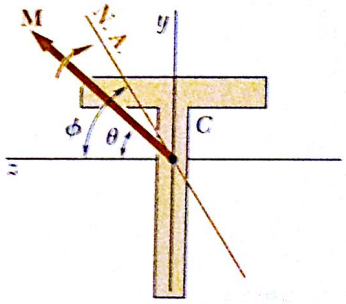


Figura 4.65

El caso general de *carga axial excéntrica* se analizó en la sección 4.14, en donde nuevamente se reemplazó la carga por un sistema fuerza-par localizado en el centroide. Luego se superpusieron los esfuerzos debidos a la carga excéntrica con los de los dos pares componentes dirigidos según los ejes principales:

Caso general de carga axial excéntrica

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{4.58}$$

El capítulo concluyó con el análisis de esfuerzos en *elementos curvos* (figura 4.76*a*). Mientras las secciones transversales permanecen planas, cuando el elemento está sometido a flexión, se halló que los *esfuerzos no varían linealmente* y que la superficie neutra no pasa por el centroide de la sección. La distancia R del centro de curvatura del elemento a la superficie neutra, se encontró que era

Elementos curvos

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \tag{4.66}$$

donde A es el área de la sección transversal. El esfuerzo normal a una distancia y de la superficie neutra se expresó como

$$\sigma_x = -\frac{My}{Ae(R - y)} \tag{4.70}$$

donde M es el momento flector y e la distancia del centroide de la sección al eje neutro.

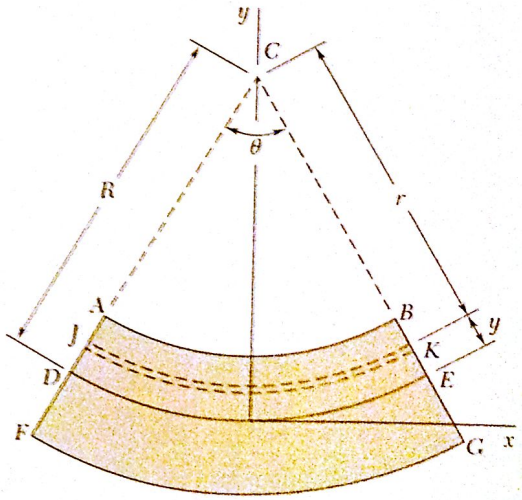


Figura 4.76*a*

PROBLEMAS DE REPASO

4.184 y *4.185* Dos secciones laminadas W4 × 13 se unen con soldadura como se indica en la figura. Si se sabe que para la aleación de acero utilizada $\sigma_Y = 36$ ksi y $\sigma_U = 58$ ksi con un factor de seguridad de 3.0, determine el máximo par que puede aplicarse cuando el ensamble se flexiona alrededor del eje z.

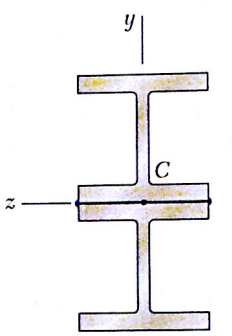


Figura P4.184

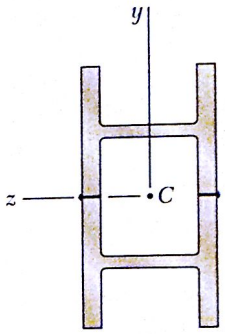


Figura *P4.185*

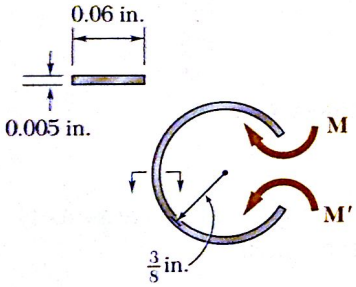


Figura P4.186

4.186 Se observa que una tira delgada de acero con 0.06 in. de ancho puede doblarse en un círculo de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro sin que se produzca ninguna deformación permanente. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) el esfuerzo máximo sobre la tira flexionada, *b*) la magnitud de los pares requeridos para doblar la tira.

4.187 Una barra que tiene la sección transversal mostrada en la figura se ha formado al unir fuertemente piezas de latón y aluminio. Con los datos que se presentan a continuación, determine el momento flector máximo permisible cuando la barra compuesta se flexiona alrededor de un eje horizontal.

	Aluminio	Latón
Módulo de elasticidad	70 GPa	105 GPa
Esfuerzo permisible	100 MPa	160 MPa

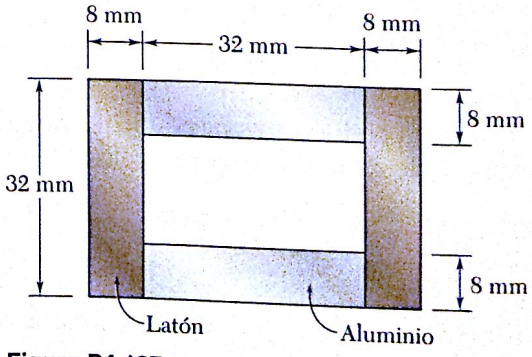


Figura P4.187

4.188 Para la barra compuesta del problema 4.187, determine el momento flector máximo permisible cuando la barra se flexiona alrededor de un eje vertical.

4.189 Al extremo de un perfil W8 × 21 de acero laminado pueden aplicarse hasta tres cargas axiales, cada una de magnitud $P = 10$ kips. Determine el esfuerzo en el punto A, *a*) para la carga indicada, *b*) si sólo se aplican cargas en los puntos 1 y 2.

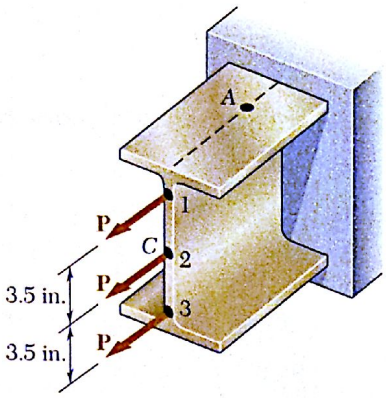


Figura P4.189

4.190 Tres placas de acero de 120 × 10 mm se soldaron para formar la viga mostrada en la figura. Si se sabe que el acero es elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 300$ MPa, determine *a*) el momento flector para el que las zonas plásticas en las partes superior e inferior de la viga son de 40 mm de espesor, *b*) el radio de curvatura correspondiente en la viga.

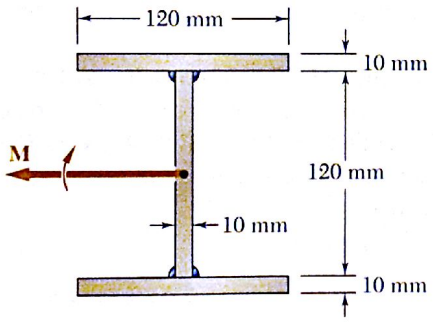


Figura P4.190

4.191 Una fuerza vertical **P** con magnitud de 20 kips se aplica en un punto C localizado en el eje de simetría de la sección transversal de una columna corta. Si se sabe que $y = 5$ in., determine *a*) el esfuerzo en el punto A, *b*) el esfuerzo en el punto B, *c*) la localización del eje neutro.

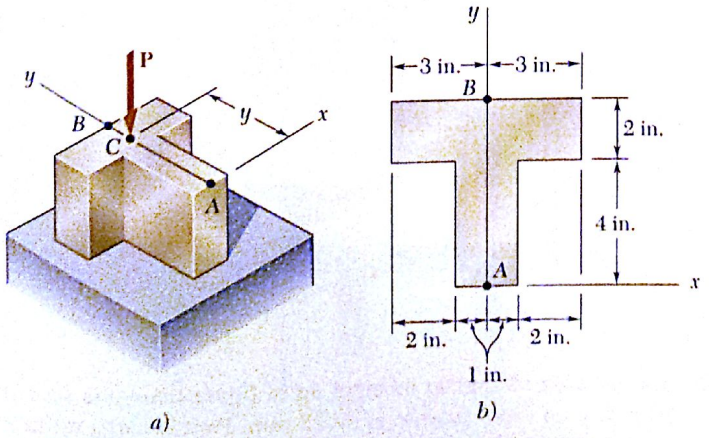


Figura P4.191

4.192 El perfil que se muestra en la figura se formó doblando una placa delgada de acero. Si se supone que el espesor t es pequeño comparado con la longitud a del lado del perfil, determine el esfuerzo *a*) en A, *b*) en B, *c*) en C.

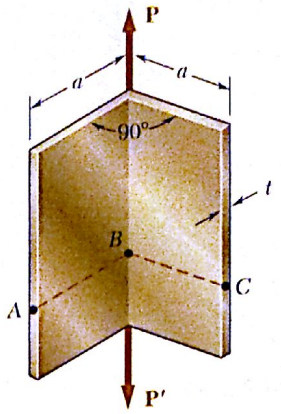


Figura P4.192

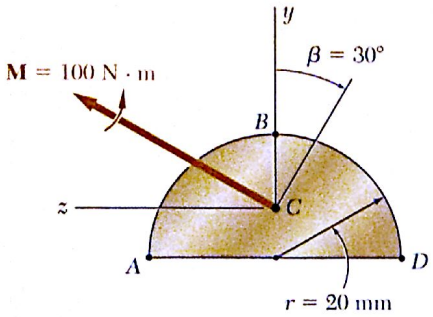


Figura P4.193

4.193 El par **M** se aplica a la viga cuya sección se muestra en la figura, en un plano que forma un ángulo β con la vertical. Determine el esfuerzo *a*) en el punto A, *b*) en el punto B, *c*) en el punto D.

4.194 Una placa circular rígida con un radio de 125 mm se sujeta a un poste sólido rectangular de 150 × 200 mm, con el centro de la placa directamente encima del centro del poste. Si se aplica una fuerza **P** de 4 kN en E con $\theta = 30°$, determine *a*) el esfuerzo en el punto A, *b*) el esfuerzo en el punto B, *c*) el punto donde el eje neutro interseca la línea ABD.

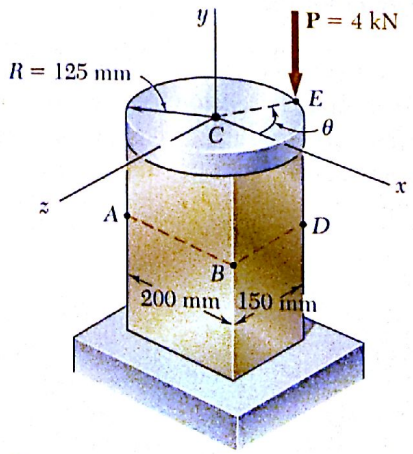


Figura *P4.194*

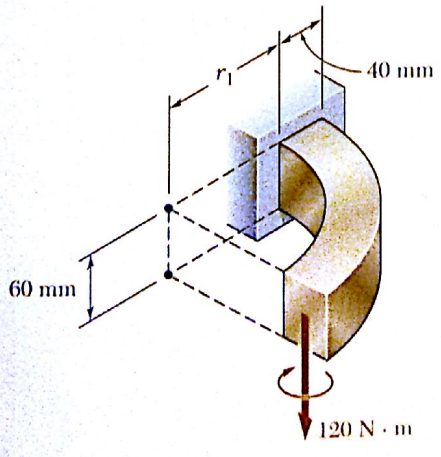


Figura P4.195

4.195 La barra curva que se muestra en la figura tiene una sección transversal de 40 × 60 mm y un radio interno $r_1 = 15$ mm. Para la carga mostrada en la figura, determine los esfuerzos máximos a tensión y a compresión en la barra.